Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
03.11.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 02. Übungsblatt

Aufgabe 4:

(a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = \frac{1}{2}$). Wegen $y(0) = \frac{1}{4}$, interessieren wir uns zunächst für Lösungen $y > 0$. Für solche darf man die Differentialgleichung durch $\sqrt{y(x)}$ dividieren und erhält die äquivalente Gleichung

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} + \sqrt{y(x)} - 1 = 0.$$

Definiere $z(x) = \sqrt{y(x)}$. Wegen $y > 0$ ist z definiert und differenzierbar mit $z'(x) = \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}}$. Die obige Gleichung ist dann zu

$$z' = \frac{1}{2} - \frac{z}{2}$$

äquivalent. Dies ist eine lineare Differentialgleichung für z. Eine partikuläre Lösung $z_p(x) = 1$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung v_h der homogenen Gleichung ist durch

$$z_h(t) = Ce^{-\frac{x}{2}}$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $z(x) = z_p(x) + z_h(x) = 1 + Ce^{-\frac{x}{2}}$. Durch die Anfangsbedingung $z(0) = \sqrt{y(0)} = \frac{1}{2}$ wird $C = -\frac{1}{2}$ festgelegt. Es gilt

$$y(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} > 0 \Leftrightarrow 2 > e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \ln(2) > -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \underbrace{-2\ln(2)}_{=:x_0} > x.$$

Also ist die Lösung y der ursprünglichen Gleichung zumindest auf dem Intervall $I = (x_0, \infty)$ eindeutig und durch

$$y(x) = z^2(t) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2$$

für alle $x \in I$ gegeben. Diese ist nicht weiter nach rechts fortsetzbar.

Jede Fortsetzung nach links muss wegen der Stetigkeit der Lösungen

$$y(x_0) = \lim_{x \to x_0+} y(x) = 0$$

erfüllen. Die Differentialgleichung liefert zusätzlich $y'(x_0) = \sqrt{y(x_0)} - y(x_0) = 0$. In der Tat ist die identisch verschwindende Funktion eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung. Wegen

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2\right]'_{x=x_0} = \left[\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right]'_{x=x_0} = 0$$

kann man y durch 0 weiter nach links differenzierbar fortsetzen und erhält eine nicht weiter fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems mit

$$y(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 & \text{für } x > x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Angenommen, es gäbe eine weitere Lösung $\tilde{y}$ mit $\tilde{y}(x_1) > 0$ für ein $x_1 < x_0$. O.B.d.A. gilt $0 \leq \tilde{y}(x) < 1$ für alle $x \in (x_1, x_0)$ (Zwischenwertsatz). Die Differentialgleichung liefert dann

$$\tilde{y}'(x) = \sqrt{\tilde{y}(x)}\left(\sqrt{\tilde{y}(x)} - w(t)\right) \geq 0,$$

womit $\tilde{y}$ auf $[x_1, x_0]$ monoton wachsend wäre. Aber $\tilde{y}(x_1) > 0 = \tilde{y}(x_0)$ im Widerspruch dazu. Also ist das obige y die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe.

(b) Für $x > 0$ ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$3y^2u' = 3x - \frac{3y^3}{x} = 0$$

($\rightsquigarrow$ Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = -2$). Definiere $z(x) = y^3(x)$, dann ist $z'(x) = 3y^2(x)y'(x)$. Dann ist die obige Differentialgleichung äquivalent zu

$$z' = 3x - \frac{3}{x}z.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für z. Für eine partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $z_p(t) = C_1x^2$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$2C_1x = 3x - 3C_1x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{5}{3}C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{3}{5}.$$

Also ist $z_p(t) = \frac{3}{5}x^2$ eine partikuläre Lösung der linearen Differentialgleichung. Für eine Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz $z_h(t) = x^\nu$ mit $\nu \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\nu x^{\nu-1} = -3x^{\nu-1} = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \nu = -3.$$

Also ist $z(x) = z_p + C_2z_h = \frac{3}{5}x^2 + C_2x^{-3}$ für $x > 0$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung mit der freien Konstanten $C_2 \in \mathbb{R}$. Durch die Anfangsbedingung $z(1) = y^3(1) = -1$ wird $C_2 = -\frac{8}{5}$ festgelegt.

Wir halten noch

$$z(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^2 - \frac{8}{5x^3} < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < \sqrt[5]{\frac{8}{3}} =: x_0$$

fest. Damit ist

$$y(x) = \sqrt[3]{z(x)} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^2 - \frac{8}{5x^3}}$$

die auf $I = (0, x_0)$ eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. Wegen

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = -\infty$$

ist sie nicht weiter nach links fortsetzbar. Eine Fortsetzung nach rechts müsste

$$y(x_0) = \lim_{x \to x_0-} y(x) = 0$$

leisten. Allerdings liefert das Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung

$$\underbrace{x_0 y^2(x_0) y'(x_0)}_{=0} - x_0^2 + \underbrace{y^3(x_0)}_{=0} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

im Widerspruch zu $x_0 = \sqrt[5]{\frac{8}{3}}$. Also ist das obige $y : I \to \mathbb{R}$ die eindeutige, nicht weiter fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems.

(c) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Riccatische Differentialgleichung. Eine partikuläre Lösung y_p mit

$$y_p(x) = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ kann man erraten. Setze $z = y - y_p$. Dann erfüllt y genau dann die Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned} z' &= y' - y_p' \\ &= (y^2 - y_p^2) - (2x+1)(y - y_p) \\ &= (y - y_p)(y + y_p) - (2x+1)z(t) \\ &= z(z + 2y_p) - (2x+1)z(t) \\ &= z^2 - z \end{aligned}$$

erfüllt.

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung. Für den Anfangswert gilt

$$z(0) = y(0) - y_p(0) = \frac{1}{3} > 0.$$

Deswegen interessieren wir uns zunächst für Lösungen $z > 0$. Für solche darf man die Differentialgleichung für z durch z^2 dividieren und erhält die äquivalente Gleichung

$$-\frac{z'}{z^2} = -1 + \frac{1}{z}.$$

Definiere $w(x) = \frac{1}{z(x)}$. Wegen $z > 0$ ist w differenzierbar mit $w'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$. Die obige Differentialgleichung lautet dann

$$w' = 1 - w.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für w. Eine partikuläre Lösung $w_p = 1$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung w_h der homogenen Gleichung ist durch

$$w_h(x) = Ce^x$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $w(x) = w_h(x) + w_p(x) = 1 + Ce^x$. Durch die Anfangsbedingung $w(0) = \frac{1}{z(0)} = 3$ wird $C = 2$ festgelegt. Damit ist $w(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$z(x) = \frac{1}{w(x)} = \frac{1}{1+2e^x}, \qquad \text{bzw.} \qquad y(x) = y_p(x) + z(x) = x + \frac{1}{1+2e^x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das obige y ist die eindeutige, nicht weiter fortsetzbare Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

Aufgabe 5:
Sei γ eine reguläre Raumkurve. Es gilt

$$\begin{aligned}\big(\gamma'(t)|f(\gamma(t))\big) &= 0\\ \Leftrightarrow f_1(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} + f_2(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t} &= 0.\end{aligned}$$

Dies ist eine spezielle Form der Differentialgleichung

$$f_1(x,y)\mathrm{d}x + f_2(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Setze $P(x,y) = f_1(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$ und $Q(x,y) = f_2(x,y) = \frac{8y}{1+x^2+y^2}$. Untersuche die Differentialgleichung auf Exaktheit: Es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-16xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

für alle $xy \neq 0$. Also ist die Differentialgleichung nicht exakt.

Wir machen einen Ansatz für einen integrierenden Faktor $\mu(x,y) = 1 + x^2 + y^2 > 0$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}2x = 0 = \frac{\partial}{\partial x}8y = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. In der Tat ist also das obige μ ein integrierender Faktor auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Es gilt

$$\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + \varphi_2(y), \quad \int 8y\mathrm{d}y = 4y^2 + \varphi_1(x).$$

Also ist $F(x,y) = x^2 + 4y^2$ eine Stammfunktion von $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

Damit erfüllt γ genau dann die Skalarproduktbedingung, wenn $F \circ \gamma$ konstant ist, also

$$\gamma_1(t)^2 + (2\gamma_2(t))^2 = C^2 \geq 0.$$

Für $C \neq 0$ ist dies die Gleichung einer Ellipse mit der großen Halbachse C und der kleinen Halbachse $\frac{C}{2}$. Also ist die Spur von γ ein Stück einer Ellipse.

Für $C = 0$ folgt $\gamma'(t) = 0$ für alle $t \in I$. Damit ist γ keine reguläre Raumkurve.

Aufgabe 6:
Setze $P(x,y) = \tan(xy) + xy$, $Q(x,y) = x^2$.

(a) Es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x(2 + \tan^2(xy)) \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

für $xy \neq 0$. Damit ist die Differentialgleichung nicht exakt.

(b) Einsetzen des Ansatzes $\mu(x,y) = \mu(xy)$ in die Vertauschbarkeitsbedingung liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(xy)(\tan(xy) + xy)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(xy)x^2\right)\\ \Leftrightarrow x\mu'(xy)(\tan(xy) + xy) + x\mu(xy)(2 + \tan^2(xy)) &= x^2y\mu'(xy) + 2\mu(xy)x\\ \Leftrightarrow x\mu'(xy)\tan(xy) + x\mu(xy)\tan^2(xy) &= 0\\ \Leftarrow \mu'(xy) + \tan(xy)\mu(xy) &= 0\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung in der Variablen $z = xy$ für μ. Wegen der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{\pi}{6}$ interessieren uns $z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni \frac{\pi}{6}$. Eine Stammfunktion von $-\tan$ ist durch

$$-\int \tan(z)\mathrm{d}z = -\int \frac{\sin(z)}{\cos(z)}\mathrm{d}z \underset{\mathrm{d}z=-\frac{1}{\sin(z)}\mathrm{d}u}{\overset{\cos(z)=u}{=}} \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln(u) = \ln(\cos(z))$$

auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni z$ gegeben. Damit ist

$$\mu(z) = e^{-\int \tan(z)\mathrm{d}z} = \cos(z)$$

für $z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung. Da $\cos(xy) > 0$ für $(x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < \frac{\pi}{2}\right\}$, ist μ ein integrierender Faktor der ursprünglichen Differentialgleichung auf der sternförmigen, offenen Menge $D \ni \left(1, \frac{\pi}{6}\right)$. Da $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nicht definiert ist (ursprüngliche Differentialgleichung), ist D tatsächlich maximal.

Sei $\tilde{P}(x,y) = \mu(xy)P(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$ und $\tilde{Q}(x,y) = \mu(xy)Q(x,y) = \cos(xy)x^2$. Dann ist die Differentialgleichung

$$\tilde{P}\mathrm{d}x + \tilde{Q}\mathrm{d}y = 0$$

exakt und auf D zur ursprünglichen äquivalent.

(c) Gesucht ist eine Stammfunktion von

$$\begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ x^2\cos(xy) \end{pmatrix}$$

auf D. Es ist

$$F(x,y) := \int Q(x,y)\mathrm{d}y = \int x^2\cos(xy)\mathrm{d}y = x\sin(xy) + \varphi(x)$$

für alle $(x,y) \in D$. Mit der Bedingung

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

folgt $\varphi'(x) = 0$, also etwa $\varphi = 0$. Damit ist $F(x,y) = x\sin(xy)$ eine gesuchte Stammfunktion. Die Lösungen des ursprünglichen Anfangswertproblems sind implizit durch

$$x\sin(xy) = F(x,y) = F\left(1, \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

mit $(x,y) \in D$ gegeben.

(d) Die implizite Form der Lösung zusammen mit der Bedingung $(x,y) \in D$ liefert $|x| > \frac{1}{2}$. Also ist das größte Existenzintervall jeder expliziten Lösung des Anfangswertproblems gerade $I = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Tatsächlich lässt sich die implizite Gleichung für alle $x \in I$ durch

$$y(x) = \frac{1}{x}\arcsin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

nach y auflösen.

Aufgabe 7:

(a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = 2$). Folglich (vgl. Abschnitt 23.3 der Vorlesung) erhält man nach der Substitution $z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y(x)}$ die lineare DGL

$$z' = -xz - x.$$

Eine partikuläre Lösung $z_p(t) = -1$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung z_h ist durch

$$z_h(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $z(x) = z_p(x) + z_h(x) = -1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. Durch die Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1$ wird $C = 2$ festgelegt. Es gilt

$$z(x) > 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} > -\ln(2) \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2\ln(2)} := x_0.$$

Also ist die Lösung y der ursprünglichen Gleichung zumindest auf dem Intervall $I = (-x_0, x_0)$ eindeutig und durch

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{2e^{-\frac{x^2}{2}} - 1}$$

für alle $x \in I$ gegeben. Wegen

$$\lim_{x\to -x_0+} y(x) = \lim_{x\to x_0-} y(x) = \infty$$

ist sie weder nach links noch nach rechts weiter fortsetzbar.

(b) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = -\frac{1}{3}$). Folglich erhält man nach der Substitution $z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{4}{3}}$ die lineare DGL

$$z' = -\frac{4}{3x}z + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Für eine partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $z_p(x) = C_1 x^{\frac{2}{3}}$ mit einer Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$z_p' = C_1 \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{4}{3}C_1\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{6}{3}C_1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow C_1 = \frac{2}{3}.$$

Für die allgemeine Lösung z_h der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz $z_h(x) = C_2 x^\nu$ mit einer freien Konstante C_2 und einem $\nu \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$z_h'(x) = C_2 \nu x^{\nu-1} = -\frac{4C_2}{3}x^{\nu-1} \underset{x>0}{\overset{C_2 \text{ bel.}}{\Leftrightarrow}} \nu = -\frac{4}{3}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$z(x) = z_p(x) + z_h(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + C_2 x^{-\frac{4}{3}}.$$

Durch die Anfangsbedingung $z(1) = y^{\frac{4}{3}}(1) = 1$ wird $C_2 = \frac{1}{3}$ festgelegt. Damit ist offensichtlich $z(x) > 0$ für alle $x > 0$. Also ist die Lösung y der ursprünglichen Gleichung zumindest auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ eindeutig und durch

$$y(x) = z^{\frac{3}{4}}(x) = \left(\frac{1}{3}\left(x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}\right)\right)^{\frac{3}{4}}$$

für alle $x \in I$ gegeben. Wegen

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = \infty$$

ist sie weder nach links noch nach rechts weiter fortsetzbar.

(c) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Riccatische Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 25.5 der Vorlesung). Eine partikuläre Lösung ϕ mit

$$\phi(x) = e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ kann man erraten. Setze $u = y - \phi$ und $z = \frac{1}{u}$. Dann erfüllt z die lineare DGL

$$z' = -3z - e^{-x}.$$

Für eine partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $z_p(x) = C_1 e^{-x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$-C_1 e^{-x} = -3C_1 e^{-x} - e^{-x} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Die allgemeine Lösung z_h der homogenen Gleichung ist durch

$$z_h(x) = Ce^{-3x}$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $z(x) = z_h(x) + z_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + Ce^{-3x}$. Durch die Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{y(0)-\phi(0)} = -2$ wird $C = -\frac{3}{2}$ festgelegt. Damit ist $z(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{-1}{\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-3x}}, \qquad \text{bzw.} \qquad y(x) = \phi(x) + u(x) = e^x - \frac{2}{e^{-x} + 3e^{-3x}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das obige y ist die eindeutige, nicht weiter fortsetzbare Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

Aufgabe 8:

Setze $P(x,y) = \sin(x) + \sinh(y)$, $Q(x,y) = \cosh(y)$.

(a) Es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cosh(y) \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Differentialgleichung nicht exakt.

(b) Einsetzen des Ansatzes $\mu(x,y) = \mu(x)$ in die Vertauschbarkeitsbedingung liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)(\sin(x) + \sinh(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu(x)\cosh(y) \\ \Leftrightarrow \cosh(y)m(x) &= \mu'(x)\cosh(y) \\ \overset{\cosh(y)\geq 1}{\Leftrightarrow} \mu'(x) &= \mu(x). \end{aligned}$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist $\mu(x) = e^x$. Wegen $\mu(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ist μ tatsächlich ein integrierender Faktor auf der offenen, sternförmigen Menge $D = \mathbb{R}^2$. Offensichtlich ist $D \ni \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ maximal.

Sei $\tilde{P}(x,y) = \mu(x)P(x,y) = e^x(\sin(x) + \sinh(y))$ und $\tilde{Q}(x,y) = \mu(x)Q(x,y) = e^x\cosh(y)$. Dann ist die Differentialgleichung

$$\tilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \tilde{Q}(x,y) = 0$$

exakt und auf D zur ursprünglichen Gleichung äquivalent.

(c) Gesucht ist eine Stammfunktion von

$$\begin{pmatrix}\tilde{P}\\ \tilde{Q}\end{pmatrix}(x,y) = e^x\begin{pmatrix}\sin(x)+\sinh(y)\\ \cosh(y)\end{pmatrix}$$

auf D. Sei $(x,y)\in\mathbb{R}$. Definiere $\gamma : [0,1]\to\mathbb{R}$ durch

$$\gamma(t) = t\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad \forall t\in[0,1]. \qquad \text{Dann} \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad \forall t\in[0,1].$$

Eine gesuchte Stammfunktion F erhält man durch

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_\gamma \begin{pmatrix}\tilde{P}\\ \tilde{Q}\end{pmatrix}\cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 \begin{pmatrix}e^{xt}\sin(xt)+\sinh(yt)\\ e^{xt}\cosh(yt)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 xe^{xt}\sin(xt) + xe^{xt}\sinh(yt) + e^{xt}y\cosh(yt))\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_0^1 xe^{xt}\sin(xt)\mathrm{d}t}_{=:I_1} + \left[e^{xt}\sinh(yt)\right]_{t=0}^1 = I_1 + e^x\sinh(y). \end{aligned}$$

Auf das Integral I_1 wendet man den *„Phönix aus der Asche“*™an und erhält

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \underbrace{xe^{xt}}_{u'}\underbrace{\sin(xt)}_{v}\,\mathrm{d}t = \left[e^{xt}\sin(xt)\right]_{t=0}^1 - \int_0^1 \underbrace{xe^{xt}}_{u'}\underbrace{\cos(xt)}_{v}\,\mathrm{d}t \\ &= e^x\sin(x) - \left[e^{xt}\cos(xt)\right]_{t=0}^1 - \underbrace{\int_0^1 xe^{xt}\sin(xt)\mathrm{d}t}_{=I_1} = e^x(\sin(x)-\cos(x)) + 1 - I_1 \\ \Rightarrow I_1 &= e^x\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{F} : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$\tilde{F}(x,y) = F(x,y) - \frac{1}{2} = e^x\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2} + \sinh(y)\right)$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ eine gesuchte Stammfunktion.

Die Lösungen des ursprünglichen Anfangswertproblems sind implizit gegeben durch

$$e^x\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2} + \sinh(y)\right) = \tilde{F}(x,y) = \tilde{F}\left(\frac{\pi}{4},0\right) = 0.$$

(d) Die implizite Gleichung lässt sich für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nach y auflösen. Man erhält

$$y(x) = \operatorname{Arsinh}\left(\frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 9:
Nach der Grundgleichung der Mechanik gilt

$$F = ma,$$

wobei F die Summe aller auf das Teilchen einwirkenden Kräfte und $a = \dot{v}$ seine Beschleunigung ist. Die einzigen wirkenden Kräfte sind die Gravitationskraft $F_g = -mg$ und F_f. Nach Division durch m liefert es die Differentialgleichung

$$\dot{v} = -g - \frac{k}{m} v\,|v|$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$. Zunächst versuchen wir die physikalischen Konstanten aus dieser Gleichung zu eliminieren und betrachten

$$v(t) = C_1 u(C_2 t)$$

mit noch unbestimmten Konstanten $C_1, C_2 > 0$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= C_1 C_2 u'(C_2 t) = -g - \frac{k}{m} C_1^2 u(C_2 t)\,|u(C_2 t)| \\ \Leftrightarrow u'(C_2 t) &= -\frac{g}{C_1 C_2} - \frac{k}{m}\frac{C_1}{C_2} u(C_2 t)\,|u(C_2 t)|\,. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung lässt sich also für

$$C_1 C_2 = g,\ \frac{C_1}{C_2} = \frac{m}{k} \Leftrightarrow C_1 = \sqrt{\frac{mg}{k}},\ C_2 = \sqrt{\frac{kg}{m}}$$

zu

$$u'(\tau) = -1 - u(\tau)\,|u(\tau)|$$

vereinfachen. Die Anfangsbedingung lautet $u(0) = \frac{v_0}{C_1} = v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}} =: u_0$.

Wegen des Betrages in der Differentialgleichung bietet sich eine Fallunterscheidung an.

- $u_0 \geq 0$: Dann interessieren uns zunächst Lösungen mit $u \geq 0$. Für diese lautet die Differentialgleichung

  $$u' = -(1 + u^2).$$

  Dies ist (unter Anderem) eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Man löst formal:

  $$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= -(1+u^2) \\ \rightsquigarrow -\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \mathrm{d}\tau \\ \rightsquigarrow -\int_{u_0}^{u(\tau)} \frac{1}{1+\eta^2}\mathrm{d}\eta &= \int_0^\tau 1 \mathrm{d}\xi \\ \Rightarrow -\left[\arctan(\eta)\right]_{\eta=u_0}^{u(\tau)} &= \tau \\ u(\tau) &= -\tan\left(\tau - \arctan(u_0)\right) \end{aligned}$$

  Da $1 + u^2$ nie verschwindet, ist dies tatsächlich die eindeutig bestimmte Lösung auf dem maximalen Existenzintervall $I = \left(\arctan(u_0) - \frac{\pi}{2}, \arctan(u_0) + \frac{\pi}{2}\right)$. Die Bedingung $u \geq 0$ schränkt diesen aber auf $I_0 = (\arctan(u_0) - \frac{\pi}{2}, \underbrace{\arctan(u_0)}_{=:\tau_0}]$ ein. Um die Lösung weiter nach rechts fortsetzen zu können, müssen wir die ursprüngliche Differentialgleichung für negative u lösen. Dies wird im nächsten Fall abgedeckt:

- $u_0 < 0$: Wir interessieren uns zunächst für Lösungen mit $u < 0$. Für diese lautet die Differentialgleichung

$$u' = -(1 - u^2).$$

Auch diese ist wieder (unter Anderem) eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Man löst formal:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= -(1-u^2) \\ \rightsquigarrow -\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} &= \mathrm{d}\tau \\ \rightsquigarrow -\int_{u_0}^{u(\tau)} \frac{1}{1-\eta^2}\mathrm{d}\eta &= \int_0^\tau 1\mathrm{d}\xi = \tau \end{aligned}$$

Hier wird wieder eine Fallunterscheidung nötig:

  - $-1 < u_0$: Wir interessieren uns also zunächst für Lösungen $-1 < u$. Für diese berechnet man das obige Integral zu

$$\begin{aligned} \tau &= -\int_{u_0}^{u(\tau)} \frac{1}{1-\eta^2}\mathrm{d}\eta \\ &= -\left[\operatorname{Artanh}(\eta)\right]_{\eta=u_0}^{u(\tau)} \\ \rightsquigarrow u(\tau) &= -\tanh(\tau - \operatorname{Artanh}(u_0)). \end{aligned}$$

Wegen $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$, verschwindet $1 - u^2$ nie und die obige Formel definiert die eindeutig bestimmte Lösung auf dem maximalen Existenzintervall $J = \mathbb{R}$. Die Forderung $u < 0$ schränkt diesen jedoch auf $I_1 = (\underbrace{\operatorname{Artanh}(u_0)}_{=:\tau_1}, \infty)$ ein. Die Lösung kann weiter nach links durch den bereits behandelten Fall $u_0 = 0$ fortgesetzt werden (siehe weiter unten).

  - $u_0 < -1$: Wir könnten eine Stammfunktion von $\frac{1}{1-\eta^2}$ auf $(-\infty, 1)$ bestimmen und wie im letzten Fall vorgehen. Hier wird jedoch eine andere Lösung vorgestellt.

Die Differentialgleichung ist (unter Anderem) eine Riccatische Differentialgleichung. Eine partikuläre Lösung $\phi = -1$ ist leicht zu erraten. Setze $w = u - \phi$ und $f = \frac{1}{w}$. Dann erfüllt f die lineare DGL

$$f' = 2f - 1.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für f. Eine partikuläre Lösung $f_p(\tau) = \frac{1}{2}$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist durch $f_h(\tau) = Ce^{2\tau}$ mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $f(\tau) = f_p(\tau) + f_h(\tau) = \frac{1}{2} + Ce^{2\tau}$. Durch die Anfangsbedingung $f(0) := f_0 = \frac{1}{w} = \frac{1}{u_0+1}$ wird $C = \frac{1-u_0}{2(1+u_0)}$ festgelegt. Damit ist

$$f(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-u_0}{1+u_0}e^{2\tau}\right)$$

die eindeutig bestimmte Lösung der linearen Differentialgleichung auf dem maximalen Existenzintervall $K = \mathbb{R}$. Die Forderung

$$\begin{aligned} f(\tau) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-u_0}{1+u_0}e^{2\tau}\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1-u_0}{1+u_0}}_{<0}e^{2\tau} &< -1 \\ \Leftrightarrow (1-u_0)e^{2\tau} &> -(1+u_0) \\ \Leftrightarrow \tau &> \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1+u_0}{1-u_0}\right) =: \tau_2 \end{aligned}$$

schränkt diesen jedoch auf $I_2 = (\tau_2, \infty)$ ein. Damit ist

$$u(\tau) = -1 + \frac{2}{1 + \frac{1-u_0}{1+u_0}e^{2\tau}}$$

die eindeutig Bestimmte Lösung der Differentialgleichung für u auf dem Intervall I_2. Wegen $\lim_{\tau\to\tau_2+} u(\tau) = -\infty$ ist sie nicht weiter fortsetzbar.

– $u_0 = -1$: In diesem Fall ist $u(\tau) = -1$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Angenommen, es gäbe eine weitere Lösung $\tilde{u}$ mit $\tilde{u}(\tilde{\tau}) \neq -1$ für ein $\tilde{\tau} \in \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{u}$ eine Lösung der Differentialgleichung für u zusammen mit der Anfangsbedingung $u(\tilde{\tau}) = \tilde{u}(\tilde{\tau})$. Dieses Anfangswertproblem ist aber eindeutig lösbar (siehe alle vorhergehenden Fälle). Keine der Lösungen nimmt je den Wert -1 an. Also ist $\tilde{u}(0) \neq -1$ im Widerspruch zur Annahme.

Wir resubstituieren und fassen die Ergebnisse zusammen: Für jedes $v_0 \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem für v eindeutig lösbar.

- $v_0 < -\sqrt{\frac{mg}{k}}$: Das maximale Existenzintervall ist $J_2 = \left(\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0}\right), \infty\right)$. Es gilt

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(-1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0}{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0}\right)e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}2t}}\right)$$

  für alle $t \in J_2$.

- $v_0 = -\sqrt{\frac{mg}{k}}$: Das maximale Existenzintervall ist $J_1 = \mathbb{R}$. Es gilt

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

  für alle $t \in J_1$.

- $-\sqrt{\frac{mg}{k}} < v_0$: Das maximale Existenzintervall ist $J_0 = \left(t_0 - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{kg}}, \infty\right)$ mit

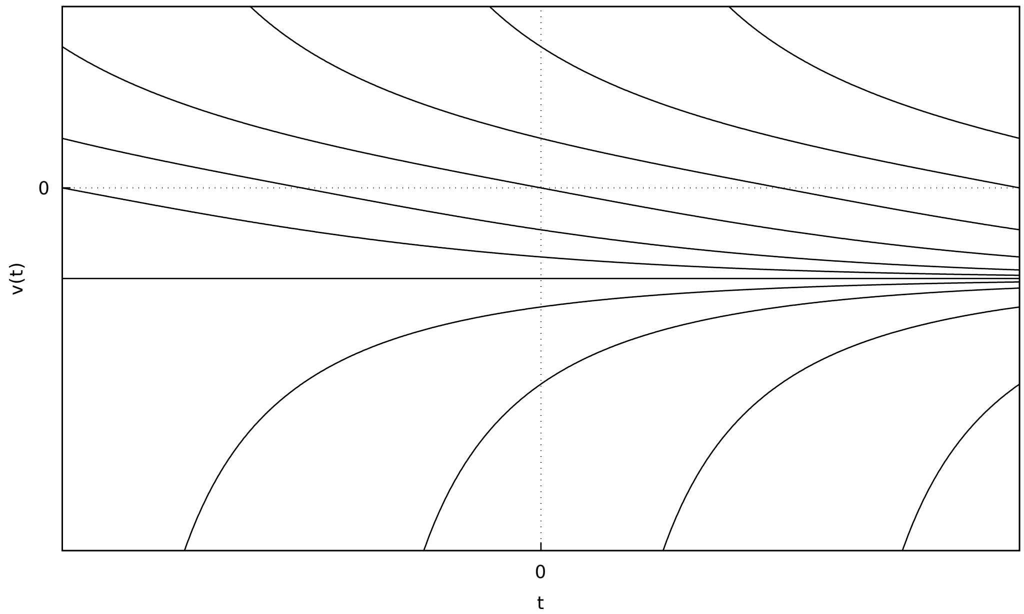
$$t_0 = \begin{cases} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right) & \text{für } v_0 \geq 0, \\ \operatorname{Artanh}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right) & \text{für } -\sqrt{\frac{mg}{k}} < v_0 < 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$u(t) = \begin{cases} -\tan\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}(t-t_0)\right) & \text{für } t \le t_0, \\ -\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}(t-t_0)\right) & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

für alle $t \in J_0$.

Lösungen für einige v_0 sind in der unteren Zeichnung skizziert.



http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3phys2017w/