Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
08.11.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

03. Übungsblatt

Aufgabe 10:
Betrachten Sie die implizite Differentialgleichung

$$y = x^2 - 2xy' + \frac{3}{2}(y')^2.$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y \in C^2$ der obigen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Menge E aller Paare $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, für die *mindestens eine* Lösung y der obigen Differentialgleichung mit $y(x_0) = y_0$ existiert.

(c) Bestimmen Sie die Menge U aller Paare $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, für die *genau eine* Lösung y der obigen Differentialgleichung mit $y(x_0) = y_0$ existiert.

Aufgabe 11:
Bestimmen Sie die Lösung in Parameterform der Anfangswertprobleme

(i) $(y')^3 + y' - x = 0$ mit $y(0) = 1$, sowie

(ii) $x^2 e^{y'} + xy' - y = 0$ mit $y(1) = 1$.

Aufgabe 12:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

(i) $y'' + \frac{2x}{1-x^2} y' - \frac{2}{1-x^2} y = 0$ für $0 < x < 1$, sowie

(ii) $y'' - \left(4 + \frac{2}{x}\right) y' + \left(4 + \frac{4}{x}\right) y = 2e^{2x}$ für $x > 0$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 13:
Gegeben sei die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$y = xy' - y' \arctan(y') + \frac{1}{2} \ln\left(1 + (y')^2\right).$$

(a) Geben Sie alle Geraden, welche die obige Differentialgleichung lösen, an.

(b) Berechnen Sie eine Lösung $y : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, welche

$$\limsup_{x \to -\frac{\pi}{2}+} |y(x)| = \infty = \limsup_{x \to \frac{\pi}{2}-} |y(x)|$$

erfüllt.

(c) Geben Sie eine weitere Lösung $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche auf $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ mit y übereinstimmt.

Aufgabe 14:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

(i) $y'' - \frac{2y}{x(1-x)^2} = 0$ für $0 < x < 1$, sowie

(ii) $xy'' - (3x+1)y'(t) + (2x+1)y = x^2 e^x$ für $x > 0$.

Hinweis: $y_1(x) = \frac{x}{1-x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung in (i).

Aufgabe 15:
Ein Raumschiff wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ senkrecht zur Mondoberfläche in den Himmel geschossen. Bezeichne $r(t)$ seinen Abstand zum Mondmittelpunkt zur Zeit $t \geq 0$. Dann ist $r(0) = R > 0$ der Radius des Mondes. Die Bewegung des Raumschiffes wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{r}(t) = -\frac{\gamma M}{r^2(t)}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet γ die Gravitationskonstante und M die Mondmasse.

Berechnen Sie die s.g. *Fluchtgeschwindigkeit* v_e. Dies ist diejenige minimale Anfangsgeschwindigkeit v_0, bei der das Raumschiff nicht wieder auf den Mond fällt. Lösen Sie für $v_0 = v_e$ die Bewegungsgleichung für r.

In zwei Raumdimensionen ändert sich das Gravitationspotential und die Bewegungsgleichung ist durch

$$\ddot{r}(t) = -\frac{\tilde{\gamma} M}{r(t)}$$

gegeben. Wie hoch ist jetzt die Fluchtgeschwindigkeit?

Hinweis: Aufgaben 10, 11 und 12 werden voraussichtlich in der großen Saalübung besprochen. Die restlichen Aufgaben werden im Tutorium behandelt.