Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
17.11.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 03. Übungsblatt

Aufgabe 10:

(a) Es handelt sich bei der DGL um eine implizite DGL erster Ordnung (vgl. Abschnitt 25.8 des Skriptes).

Wir suchen zunächst Lösungen mit $y'' \equiv 0$ (Geraden), also $y(x) = ax + b$ mit $x \in I$ und I ein Intervall, welches mehr als einen Punkt enthält. Einsetzen in die DGL liefert

$$ax + b = x^2 - 2ax + \frac{3}{2}a^2.$$

Diese Gleichung kann auf I nicht gelten (Koeffizientenvergleich).

Also ist jede Lösung $y \in C^2(I)$ der DGL auf keinem I eine Gerade. Damit existiert ein $\tilde{x} \in I$ mit $y''(\tilde{x}) \neq 0$ — O.B.d.A. $y''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Damit ist y' streng monoton wachsend auf I und damit invertierbar (es kann als Parameter verwendet werden). Etwa $y' : I \to J$ und $\psi := (y')^{-1} : J \to I$. Definiere $\eta = y \circ \psi$. Dann ist $\eta' = \underbrace{(y' \circ \psi)}_{=\mathrm{id}_J} \cdot \psi'$.

Einsetzen von $x = \psi(t)$ in die Differentialgleichung liefert

$$\eta(t) = \psi^2(t) - 2\psi(t)\underbrace{y'(\psi(t))}_{=t} + \frac{3}{2}\underbrace{(y'(\psi(t)))^2}_{=t^2} = \psi^2(t) - 2\psi(t)t + \frac{3}{2}t^2.$$

Differenzieren nach t ergibt

$$\begin{aligned} \eta'(t) = t\psi'(t) &= 2\psi(t)\psi'(t) - 2\psi(t) - 2t\psi'(t) + 3t \\ \Leftrightarrow (3t - 2\psi(t))\psi'(t) &= 3t - 2\psi(t) \end{aligned}$$

Wir benötigen eine Fallunterscheidung.

- $3t - 2\psi(t) \neq 0$: Dann gilt $3t - 2\psi(t) \neq 0$ auf einem Intervall $\tilde{J} \subseteq J$. O.B.d.A. sei $\tilde{J} = J$. Es muss dann $\psi'(t) = 1$ gelten. Es folgt:

$$\begin{aligned} \psi(t) = t + C &\quad\Leftrightarrow\quad \psi^{-1}(x) = x - C \\ \eta(t) = \psi^2(t) - 2\psi(t)t + \frac{3}{2}t^2 &\quad\Rightarrow\quad y(x) = \eta(\psi^{-1}(x)) = x^2 - 2x(x - C) + \frac{3}{2}(x - C)^2 \\ &\qquad\quad = \frac{1}{2}x^2 - Cx + \frac{3}{2}C^2 \end{aligned}$$

- $3t - 2\psi(t) = 0$: Dann gilt

$$\psi(t) = \frac{3}{2}t \Leftrightarrow \psi^{-1}(x) = \frac{2}{3}x$$

und es folgt

$$y(x) = \eta(\psi^{-1}(x)) = x^2 - 2x\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{x^2}{3}.$$

Wir bemerken noch, dass diese Fälle „nicht mischen". D.h. $3t - 2\psi(t) = 0$ kann im ersten Fall nur für $t = 2C$ gelten. Eine Fortsetzung von $\psi(t) = t + C$ durch $\psi(t) = \frac{3}{2}t$ ist aber nicht differenzierbar möglich.

Damit sind $y_e(x) = \frac{2}{3}x$ und $y_C = \frac{x^2}{2} - Cx + \frac{3}{2}C^2$ mit freiem Parameter $C \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der impliziten Differentialgleichung.

(b) Offenbar ist nach Teilaufgabe (a)

$$E = \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^2}{3}\right\}}_{=:E_1} \cup \underbrace{\bigcup_{C\in\mathbb{R}} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^2}{2} - Cx + \frac{3}{2}C^2\right\}}_{=:E_2}.$$

Dabei gilt $(x,y) \in E_2$ genau dann, wenn ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$y = \frac{x^2}{2} - Cx + \frac{3}{2}C^2 \Leftrightarrow C^2 - \frac{2}{3}Cx + \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}y = 0.$$

Diese (in C) quadratische Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn ihre Diskriminante

$$\Delta = \frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}y - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}y - \frac{2}{9}x^2$$

nicht-negativ ist, also $y \geq \frac{1}{3}x^2$.

Wegen $(x,y) \in E_1$ genau dann, wenn $\frac{1}{3}x^2 = y$, ist $E_1 \subseteq E_2$. Damit ist

$$E = E_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{3}x^2\right\}.$$

(c) Falls die Diskriminante Δ in der Teilaufgabe (b) positiv ist, so hat die quadratische Gleichung für C zwei verschiedene Lösungen. D.h., falls $y_0 > \frac{1}{3}x_0^2$ gilt, so sind die Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\left(x_0 + \sqrt{2}\sqrt{3y_0 - x_0^2}\right) + \frac{1}{6}\left(x_0 + \sqrt{2}\sqrt{3y_0 - x_0^2}\right)^2, \\ y_2(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\left(x_0 - \sqrt{2}\sqrt{3y_0 - x_0^2}\right) + \frac{1}{6}\left(x_0 - \sqrt{2}\sqrt{3y_0 - x_0^2}\right)^2 \end{aligned}$$

verschieden (etwa $y_1(0) \neq y_2(0)$), erfüllen aber $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$.

Ist hingegen $y_0 = \frac{1}{3}x_0^2$, so sind die Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{xx_0}{3} + \frac{1}{6}x_0^2, \\ y_e(x) &= \frac{x^2}{3} \end{aligned}$$

verschieden ($y_1''(x) = 1 \neq \frac{2}{3} = y_2''(x)$), erfüllen aber beide $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$. Damit ist

$$U = \emptyset.$$

Aufgabe 11:

(i) Suche zunächst Geraden $y(x) = ax + b$ als Lösungen der impliziten Differentialgleichung. Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL liefert

$$a^3 + a - x = 0.$$

Diese Gleichung kann auf keinem Intervall mit mehr als einem Punkt gelten (Koeffizientenvergleich). Also sind Geraden keine Lösungen.

Führe $t = y'$ als Parameter ein. Einsetzen in die DGL liefert

$$t^3 + t - x = 0 \Leftrightarrow x(t) = t(1 + t^2).$$

Es gilt ferner

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\dot{x} = t + 3t^3$$

und folglich $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}t^4 + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Wegen $x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, gilt

$$y(t = 0) = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Insgesamt ist also $y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}t^4$ die eindeutige Lösung des AWPs in Parameterform.

Im vorliegenden Fall kann t nach x aufgelöst werden

$$t = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}\sqrt{27x^2 + 4} + 9x}{18}} - \sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{27}\sqrt{27x^2 + 4} + 9x}},$$

um die Lösung in der Form $y = y(x)$ anzugeben.

(ii) Suche zunächst Geraden $y(x) = ax + b$ als Lösungen der impliziten Differentialgleichung. Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL liefert

$$x^2e^a + xa - ax - b = 0.$$

Diese Gleichung kann auf keinem Intervall mit mehr als einem Punkt gelten (Koeffizientenvergleich). Also sind Geraden keine Lösungen.

Führe $t = y'$ als Parameter ein. Einsetzen in die DGL liefert

$$x^2e^t + xt - y = 0 \Leftrightarrow y(t) = x^2e^t + xt.$$

Es gilt folglich

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\dot{x} = (2x\dot{x} + x^2)e^t + \dot{x}t + x \Leftrightarrow \dot{x} = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}x.$$

Dies ist eine lineare DGL erster Ordnung für x. Die homogene Lösung ist $x_h(t) = C_1e^{-\frac{1}{2}t}$. Wähle $x_p(t) = Ce^{-t}$ als Ansatz für eine partikuläre Lösung. Einsetzen liefert

$$-Ce^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}Ce^{-t} \Rightarrow C = 1.$$

Also ist $x(t) = C_1e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-t}$.

Einsetzen der Anfangsbedingung $x(t_0) = y(t_0) = 1$ in die DGL liefert

$$e^{t_0} + t_0 = 1.$$

Aus Monotoniegründen ist $t_0 = 0$ die einzige Lösung der obigen Gleichung. Die Bedingung $x(t_0) = 1$ setzt $C_1 = 0$ fest, also $x(t) = e^{-t}$. Insgesamt folgt $y(t) = x^2e^t + xt = (1+t)e^{-t}$. Auch im vorliegenden Fall kann t nach x aufgelöst werden ($t = -\ln(x)$), um die Lösung in der Form $y(x) = (1-\ln(x))x$ anzugeben.

Aufgabe 12:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten (vgl. Abschnitt 25.9 des Skriptes). Man erkennt mit der „Technik des scharfen Hinsehens“™, dass $y_1(x) = x$ eine Lösung der (homogenen) Differentialgleichung ist.

Das Verfahren von d'Alembert liefert die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$w' + w\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) = 0,$$

für $w = v'$, wobei $y = vy_1$. Es gilt

$$\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x = 2\ln(x) \text{ und } \int \frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\ln(1-x^2)$$

auf $(0,1)$. Damit ist $w(x) = C\frac{1-x^2}{x^2} = C\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = C_1\left(\frac{1}{x} + x\right) + C_2.$$

Damit ist $y(x) = C_1(1+x^2) + C_2x$ für alle $0 < x < 1$ mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(ii) Wir machen zunächst einen Ansatz für eine nichttriviale Lösung der homogenen DGL, etwa

$$y_1(x) = e^{\lambda x}.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned}
y_1'' - \left(4+\frac{2}{x}\right)y_1' + \left(4+\frac{4}{x}\right)y_1 &= \lambda^2e^{\lambda x} - \left(4+\frac{2}{x}\right)\lambda e^{\lambda x} + \left(4+\frac{4}{x}\right)e^{\lambda x} \\
&= e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{1}{x}(4-2\lambda)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow (\lambda-2)^2 + 2\frac{2-\lambda}{x} = (2-\lambda)\left(2-\lambda+\frac{2}{x}\right) &= 0 \\
\Leftarrow 2 &= \lambda
\end{aligned}$$

Also ist $y_1(x) = e^{2x}$ eine partikuläre Lösung der homogenen DGL.

Das Verfahren von d'Alembert liefert die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$w' - w\frac{2}{x} = 2,$$

für $w = v'$, wobei $y = vy_1$. Es gilt

$$\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x = 2\ln(x), \qquad \text{sowie} \qquad \int \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{2}{x}.$$

Damit ist

$$w(x) = Cx^2 - 2x$$

mit der freien Konstanten C. Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = C_1x^3 - x^2 + C_2.$$

Damit ist

$$y(x) = \left(C_1x^3 + C_2 - x^2\right) e^{2x}$$

für alle $x > 0$ mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 13:

(a) Einsetzen des Ansatzes $y = ax + b$ in die Differentialgleichung liefert

$$ax + b = ax - a\arctan(a) + \frac{1}{2}\ln(1 + a^2) \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}\ln(1 + a^2) - a\arctan(a).$$

Also sind genau die Geraden

$$y(x) = ax + \frac{1}{2}\ln(1 + a^2) - a\arctan(a) \qquad x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$$

Lösungen der Differentialgleichung.

(b) Substituiere $t = y'$ in der Differentialgleichung und erhalte

$$y = xt - t\arctan(t) + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2).$$

Es gilt ferner

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\dot{x} = \dot{x}t + x - \arctan(t) - \frac{t}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2}$$

und folglich $x(t) = \arctan(t)$ bzw. $t = \tan(x)$. Die so berechnete Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \tan(x)^2\right) \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

erfüllt wie gefordert

$$\limsup_{x \to -\frac{\pi}{2}+} |y(x)| = \infty = \limsup_{x \to \frac{\pi}{2}-} |y(x)|.$$

(c) Mache folgenden den Ansatz

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} a_1x + \frac{1}{2}\ln\left(1 + a_1^2\right) - a_1\arctan(a_1) & \text{für } x \geq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{2}\ln\left(1 + \tan(x)^2\right) & \text{für } |x| < \frac{\pi}{4}, \\ a_2x + \frac{1}{2}\ln\left(1 + a_2^2\right) - a_2\arctan(a_2) & \text{für } x \leq -\frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

für $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es ist klar, dass $\tilde{y}$ auf $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$ stetig differenzierbar ist und (nach den Teilaufgaben (a) und (b)) dort die DGL erfüllt.

Die Stetigkeitsbedingung in $x = \frac{\pi}{4}$ lautet

$$\frac{\ln(2)}{2} \stackrel{!}{=} a_1\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(1 + a_1^2\right) - a_1\arctan(a_1)$$

und wird von $a_1 = 1$ erfüllt. Genauso sieht man ein, dass die Stetigkeitsbedingung bei $x = -\frac{\pi}{4}$ durch $a_2 = -1$ erfüllt werden kann. Mit dieser Wahl von a_1 und a_2 gilt

$$\tilde{y}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > \frac{\pi}{4}, \\ \tan(x) & \text{für } |x| < \frac{\pi}{4}, \\ -1 & \text{für } x < -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$. Wegen $\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{4}} \tan(x) = \pm 1$, ist $\tilde{y}$ stetig differenzierbar und erfüllt tatsächlich die DGL.

Aufgabe 14:

(i) Es gilt

$$y_1'(x) = \frac{1 - x + x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad y_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

für alle $x \in (0, 1)$. Damit ist tatsächlich

$$y_1''(x) - \frac{2}{x(1-x)^2} y_1(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{x(1-x)^2} \frac{x}{1-x} = 0.$$

Das Verfahren von d'Alembert liefert die lineare DGL erster Ordnung

$$w'(x) + 2w(x) \underbrace{\frac{1}{x(1-x)}}_{\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}} = 0$$

für $w = v'$, wobei $y = vy_1$. Es gilt

$$\int \frac{2}{x} \mathrm{d}x = 2\ln(x), \qquad \text{sowie} \qquad \int \frac{2}{1-x} \mathrm{d}x = -2\ln(1-x)$$

auf $(0, 1)$. Damit ist

$$w(x) = C \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 = C \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = \tilde{C_1} \left(x - 2\ln(x) - \frac{1}{x}\right) + C_2 = C_1 \frac{1 - x^2 + 2x\ln(x)}{x} + C_2.$$

Damit ist

$$y(x) = C_1 \frac{x}{1-x} \frac{1 - x^2 + 2x\ln(x)}{x} + C_2 \frac{x}{1-x} = C_1 \left(1 + x + \frac{2x\ln(x)}{1-x}\right) + C_2 \frac{x}{1-x}$$

für alle $0 < x < 1$ mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der DGL.

(ii) Man erkennt mit der „Technik des scharfen Hinsehens"™, dass $y_1(x) = e^x$ eine Lösung ist.

Das Verfahren von d'Alembert liefert die lineare DGL erster Ordnung

$$w'(x) - w(x) \left[1 + \frac{1}{x}\right] = x$$

für $w = v'$, wobei $y = vy_1$.

$$\int 1 \mathrm{d}x = x \qquad \text{und} \qquad \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(x)$$

auf $(0, \infty)$. Ferner gilt

$$\int \frac{1}{xe^x} x \mathrm{d}x = \int e^{-x} \mathrm{d}x = -e^{-x}.$$

Damit ist

$$w(x) = C_1 x e^x - x$$

mit der freien Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$. Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = C_1(x-1)e^x - \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Damit ist

$$y(x) = C_1(x-1)e^{2x} + C_2 e^x - \frac{x^2}{2} e^x$$

für alle $x > 0$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der DGL.

Aufgabe 15:

Wir halten zunächst Folgendes fest: Falls r nach oben beschränkt ist, etwa $r(t) \leq r_{\max}$, so gilt

$$\begin{aligned}
\ddot{r}(t) &= -\frac{\gamma M}{r^2(t)} \leq -\frac{\gamma M}{r_{\max}^2} \\
\Rightarrow \dot{r}(t) &= \int_0^t \ddot{r}(\tau) \mathrm{d}\tau + v_0 \leq v_0 - \frac{\gamma M t}{r_{\max}^2} \\
\Rightarrow r(t) &\leq R + v_0 t - \frac{\gamma M t^2}{2 r_{\max}^2} \leq R \qquad \text{für} \qquad \frac{2 r_{\max}^2 v_0}{\gamma M} \leq t.
\end{aligned}$$

Also fällt das Raumschiff wieder auf den Mond, falls seine Bahn beschränkt ist. Nun gilt

$$\ddot{r}(t) = -\frac{\gamma M}{r^2(t)} < 0,$$

also ist $\dot{r}$ streng monoton fallend und kann wegen $\dot{r}(0) = v_0 > 0$ höchstens eine Nullstelle haben. Möge eine solche existieren und bei $t_0 > 0$ liegen. Auf $I_+ := [0, t_0)$ ist $\dot{r}$ demnach positiv und r streng monoton wachsend. Auf $I_- := (t_0, t_{\max})$ ist $\dot{r}$ negativ und r streng monoton fallend. Damit wäre r durch $r(t_0)$ nach oben beschränkt und das Raumschiff würde wieder auf den Mond fallen.

Falls das Raumschiff nicht wieder auf den Mond fällt, muss also $r : [0, \infty) \to [R, \infty)$ streng wachsend und damit bijektiv sein. Setze $v(\rho) := \dot{r}(r^{-1}(\rho))$ als Geschwindigkeit des Raumschiffes nachdem es die Strecke ρ zurückgelegt hat. Es gilt

$$v'(\rho) = \frac{\ddot{r}(r^{-1}(\rho))}{\dot{r}(r^{-1}(\rho))} = \frac{\ddot{r}(r^{-1}(\rho))}{v(\rho)}$$

für alle $\rho \in [R, \infty)$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert eine Differentialgleichung für v

$$v(\rho) v'(\rho) = -\frac{\gamma M}{\rho^2}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung in getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned}
v\mathrm{d}v &= -\frac{\gamma M}{\rho^2}\mathrm{d}\rho \\
\rightsquigarrow \int_{v_0}^{v(\rho)} \eta \mathrm{d}\eta &= -\int_R^\rho \frac{\gamma M}{\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}(v(\rho)^2 - v_0^2) &= \gamma M\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) \\
v^2(\rho) &= v_0^2 - 2\gamma M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

Die Bedingung $v(\rho) > 0$ für alle $\rho \in [R, \infty)$ impliziert also $v_0 \geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} =: v_e \approx [\ 2,376]\mathrm{km/s}$.

Für $v_0 = v_e$ gilt also

$$v(\rho) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{\rho}} \qquad \text{und damit (Resubstitution)} \qquad r'(t) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r(t)}}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen für r. Löse formal:

$$\begin{aligned}
\sqrt{r}\mathrm{d}r &= \sqrt{2\gamma M}\mathrm{d}t \\
\rightsquigarrow \int_R^{r(t)} \sqrt{\eta}\mathrm{d}\eta &= \int_0^t \sqrt{2\gamma M}\mathrm{d}\xi \\
\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(r^{\frac{3}{2}}(t) - R^{\frac{3}{2}}\right) &= \sqrt{2\gamma M}t \\
\Leftrightarrow r(t) &= \left(\frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + R^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

In der Tat ist das obige $r(t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Damit ist dies die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe.

In zwei Raumdimensionen lautet die DGL für v in der Koordinate ρ

$$vv' = -\frac{\tilde{\gamma} M}{\rho}.$$

Die Lösung dieser DGL in getrennten Veränderlichen lautet

$$v(\rho) = \sqrt{v_0^2 - 2\tilde{\gamma} M \ln\left(\frac{\rho}{R}\right)}.$$

Offenbar ist $v(\rho_m) = 0$ für

$$\rho_m = R\exp\left(\frac{v_0^2}{2\tilde{\gamma} M}\right).$$

Nach anfänglicher Überlegung bedeutet es, dass das Raumschiff bei beliebig hoher Anfangsgeschwindigkeit v_0 wieder auf den Mond fallen würde — $v_e = \infty$.