Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
01.12.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 04. Übungsblatt

Aufgabe 16:

(a) Es handelt sich bei der DGL um eine lineare, inhomogene DGL dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (vgl. Abschnitt 25.11 des Skriptes). Das charakteristische Polynom p lautet

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \mathrm{i}, \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -\mathrm{i}$$

können erraten werden. Damit bilden y_1, y_2 und y_3 mit

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = \cos(x), \qquad y_3(x) = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem für die obige DGL.

Da $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der Ansatz von der Form der rechten Seite für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $y_p(x) = Cxe^x$. Die Konstante C wird durch Einsetzen in die DGL bestimmt. Es gilt

$$y_p'(x) = C(1+x)e^x, \qquad y_p''(x) = C(2+x)e^x \quad \text{und} \quad y_p'''(x) = C(3+x)e^x$$

und damit

$$C(3+x)e^x - C(2+x)e^x + C(1+x)e^x - Cxe^x = 2e^x \Rightarrow C = 1.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = xe^x + C_1e^x + C_2\cos(x) + C_3\sin(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Bei der DGL handelt es sich um eine Eulersche DGL (vgl. Abschnitt 25.12 des Skriptes). Substituiere also $x = e^t$ und setze $v(t) = y(e^t)$. Dann ist $v'(t) = e^t y'(e^t)$ und $v''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$. Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned}
x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) &= x^2 \\
\Leftrightarrow e^{2t}y''(e^t) + 5e^ty'(e^t) + 4y(e^t) &= e^{2t} \\
\Leftrightarrow v''(t) + 4e^ty'(e^t) + 4y(e^t) &= e^{2t} \\
\Leftrightarrow v''(t) + 4v'(t) + 4v(t) &= e^{2t}.
\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare, inhomogene DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Damit bilden v_1 und v_2 mit

$$v_1(t) = e^{-2t}, \qquad v_2(t) = te^{-2t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem für die obige DGL.

Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der Ansatz von der Form der rechten Seite für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $v_p(t) = Ce^{2t}$. Die Konstante C wird durch Einsetzen in die DGL bestimmt, also

$$4C + 8C + 4C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{16}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL für v

$$v(t) = \frac{1}{16}e^{2t} + C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Rücksubstitution $t = \ln(x)$ liefert die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL

$$y(x) = \frac{1}{16}x^2 + C_1\frac{1}{x^2} + C_2\frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \forall x > 0.$$

Aufgabe 17:

Wir machen einen Potenzreihenansatz (vgl. Abschnitt 25.13 des Skriptes) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned}
y''(x) + xy'(x) + y(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_n\right] x^n \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die äquivalente Aussage

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_{n+2} = -\frac{c_n}{n+2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man mit der „Technik des scharfen Hinsehens"™, dass für gerade $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$

$$c_{2(k+1)} = -\frac{c_{2k}}{2(k+1)} = \frac{c_{2(k-1)}}{(2(k+1)(2k)} = \ldots = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}c_0$$

gilt, während für ungerade $n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$

$$c_{2k+1+2} = c_{2(k+1)+1} = -\frac{c_{2k+1}}{2k+3} = \frac{c_{2(k-1)+1}}{(2k+3)(2k+1)} = \ldots = \frac{(-1)^{k+1}2^{k+1}(k+1)!}{(2(k+1)+1)!}c_1$$

folgt. Durch die Wahl $c_0 = 1$ und $c_1 = 0$ bzw. $c_0 = 0$ und $c_1 = 1$ erhält man zwei linear unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k(k!)} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ y_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also $y = C_1y_1 + C_2y_2$ mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 18:

(i) Wir machen einen abgewandelten Potenzreihenansatz (vgl. Abschnitt 25.14)

$$y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad \rho \in \mathbb{R},\ c_0 = 1.$$

Dann ist

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)x^{n+\rho}, \qquad x^2y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} & x^2y''(x) + \frac{x}{2}y'(x) + \frac{x}{4}y(x) \\ = \;& x^\rho\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}\right] = 0 \\ \overset{x>0}{\Leftrightarrow}\; & \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\left[(n+\rho)\left(n+\rho-\frac{1}{2}\right)\right]}_{=:f(n+\rho)} x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{c_{n-1}}{4}\right]x^n \\ = \;& f(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n f(n+\rho) + \frac{c_{n-1}}{4}\right]x^n = 0. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die äquivalente Bedingung

$$f(\rho) = 0, \quad c_n f(n+\rho) + \frac{c_{n-1}}{4} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die erste Bedingung (*determinierende Gleichung*, vgl. Abschnitt 1.14 der Vorlesung)

$$f(\rho) = \rho\left(\rho - \frac{1}{2}\right) = 0$$

hat genau zwei verschiedene Lösungen $\rho_1 = \frac{1}{2}$ und $\rho_2 = 0$. Da $\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}_0$ (erster Fall des Satzes 25.14 der Vorlesung), führt die zweite Bedingung (*Rekurrenzgleichung*) sowohl für ρ_1 also auch für ρ_2 zu linear unabhängigen Lösungen y_1 und y_2 der DGL.

- $\rho_1 = \frac{1}{2}$: In diesem Fall lautet die Rekurrenzgleichung

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{c_{n-1}}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)n} = -\frac{c_{n-1}}{2n(2n+1)} = \frac{c_{n-2}}{(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)} = \dots \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{\frac{2n+1}{2}} = \sin\left(\sqrt{x}\right) \forall x > 0.$$

- $\rho_1 = 0$: In diesem Fall lautet die Rekurrenzgleichung

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{4\left(n-\frac{1}{2}\right)n} = -\frac{c_{n-1}}{2n(2n-1)} = \frac{c_{n-2}}{(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n} = \dots = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit lautet die Lösung

$$y_1(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \cos\left(\sqrt{x}\right)$$

für alle $x > 0$.

(ii) In der Notation des Satzes aus Abschnitt 25.14 der Vorlesung ist

$$p_j = -2\delta_1(j), \quad q_j = \frac{1}{4}\delta_0(j) + \delta_2 j \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

Damit lautet die determinierende Gleichung

$$f(\rho) = \rho(\rho-1) + \frac{1}{4} = \left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Die Rekurrenzgleichung lautet

$$\begin{aligned} f(1+\rho)c_1 - 2(1-1+\rho) &= 0, \\ f(n+\rho)c_n - 2(n-1+\rho)c_{n-1} + c_{n-2} &= 0 \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Da f eine doppelte Nullstelle hat, bekommen wir mit dem abgewandelten Potenzreihenansatz nur eine Lösung y_1 der DGL (zweiter Fall des Satzes aus Abschnitt 25.14 des Skriptes).

- $\rho_1 = \frac{1}{2}$: In diesem Fall lauten die Rekurrenzgleichungen

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ c_n &= \frac{2\left(n-\frac{1}{2}\right)c_{n-1} - c_{n-2}}{n^2} = \frac{(2n-1)c_{n-1} - c_{n-2}}{n^2} \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Die folgende Wertetabelle

n	0	1	2	3	4	5
c_n	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$

legt die Vermutung $c_n = \frac{1}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nahe. Tatsächlich gilt (Beweis per Induktion):

- **IA** ($n = 0$, $n = 1$): Siehe obige Wertetabelle.
- **IS** ($n \curvearrowright n+1$): Gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ die (**IH**)

$$c_k = \frac{1}{k!} \qquad \forall 0 \le k \le n.$$

Dann gilt für $n+1$ (Rekurrenzrelation):

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{(2n+1)c_n - c_{n-1}}{(n+1)^2} \overset{\text{(IH)}}{=} \frac{(2n+1)\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}}{(n+1)^2} = \frac{(2n+1)-n}{n!(n+1)^2} \\ &= \frac{n+1}{(n+1)!(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

□

Es folgt

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sqrt{x} e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- y_2: Für eine zweite Lösung y_1, die zu y_2 linear unabhängig ist, machen wir den Ansatz

$$y_2(x) = \ln(x) y_1(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} x y_2'(x) &= x \ln(x) y_1'(x) + y_1(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) d_n x^n, \\ x^2 y_2''(x) &= x^2 \ln(x) y_1''(x) + 2x y_1'(x) - y_1(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) d_n x^n \\ &= x^2 \ln(x) y_1''(x) + 2x y_1'(x) - y_1(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) d_n x^n. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert (ln-Terme fallen weg!)

$$\begin{aligned} & x^2 y_2''(x) - 2x \cdot x y_2'(x) + \frac{1+4x^2}{4} y_2(x) \\ = \;& 2x y_1'(x) - y_1(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) d_n x^n \\ & -2x \left[y_1(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) d_n x^n \right] + \frac{1+4x^2}{4} \left[x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n \right] \\ = \;& \left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}\right) e^x - \sqrt{x} e^x - 2x^{\frac{3}{2}} e^x \\ & + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 2xn - x) d_n x^n + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{n+2} \\ = \;& \sqrt{x} \left(d_1 x + (4d_2 - 3d_1) x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} n^2 d_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1) d_n x^{n+1} + \sum_{n=3}^{\infty} d_n x^n \right) \\ = \;& \sqrt{x} \left(d_1 x + (4d_2 - 3d_1) x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n^2+1) d_n - (2n-1) d_{n-1} \right] x^n \right) = 0 \\ \overset{\sqrt{x}>0}{\Leftrightarrow} \;& d_1 x + (4d_2 - 3d_1) x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n^2+1) d_n - (2n-1) d_{n-1} \right] x^n = 0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$d_1 = 0, \quad 4d_2 - 3d_1 = 0, \quad d_n = \frac{2n-1}{n^2+1} d_{n-2} \qquad \forall n \geq 3.$$

Damit ist $d_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$y_1(x) = \sqrt{x} e^x \ln(x)$$

für alle $x > 0$.

(iii) In der Notation des Satzes aus Abschnitt 25.14 der Vorlesung ist

$$p_j = -\delta_0(j), \quad q_j = \frac{3}{4}\delta_0(j) - \delta_2(j) \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Damit lautet die determinierende Gleichung

$$f(\rho) = \rho(\rho - 1) - \rho + \frac{3}{4} = \rho^2 - 2\rho + \frac{3}{4} = \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\left(\rho - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Diese hat die Lösungen $\rho_1 = \frac{3}{2}$ und $\rho_2 = \frac{1}{2}$. Die Rekurrenzgleichung lautet

$$f(1+\rho)c_1 = 0, \quad f(n+\rho)c_n - c_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2.$$

Da $\rho_1 - \rho_2 = 1 \in \mathbb{N}$ bekommen wir mit dem abgewandelten Potenzreihenansatz möglicherweise nur eine Lösung y_1 der DGL (dritter Fall des Satzes 25.14 der Vorlesung).

- $\rho_1 = \frac{3}{2}$: In diesem Fall lauten die Rekurrenzgleichungen

$$2c_1 = 0, \quad c_n = \frac{c_{n-2}}{(n+1)n} \qquad \forall n \geq 2.$$

Damit folgt $c_{2k+1} = 0$, sowie $c_{2k} = \frac{1}{(2k+1)!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$y_1(x) = x^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x2n+1 = \sqrt{x}\sinh(x) \qquad \forall x > 0.$$

- $\rho_2 = \frac{1}{2}$: Wir versuchen zunächst den „logarithmusfreien“ Ansatz (vgl. Satz 25.14 der Vorlesung). Die Rekurrenzgleichungen lauten

$$0 \cdot c_1 = 0, \quad c_n = \frac{c_{n-2}}{n(n-1)} \qquad \forall n \geq 2.$$

Wegen der ersten Gleichung, kann c_1 frei gewählt werden, etwa $c_1 = 0$. Die zweite Gleichung liefert dann $c_{2k+1} = 0$, sowie $c_{2k} = \frac{1}{(2n)!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit führt der „logarithmusfreie“ Ansatz in der Tat zum Ziel und es ist

$$y_2(x) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \sqrt{x}\cosh(x)$$

für alle $x > 0$.

Aufgabe 19:

(a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom p lautet

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die Nullstelle

$$\lambda_1 = -1$$

kann erraten werden. Polynomdivision liefert

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Also sind die anderen Nullstellen von p gerade $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 2$. Damit bilden y_1, y_2 und y_3 mit

$$y_1(x) = e^{-2x}, \qquad y_2(x) = e^{-x}, \qquad y_3(x) = e^{2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem für die obige DGL.

Da die Gleichung linear ist, können die partikulären Lösungen zu den Inhomogenitäten $f_1(x) = 1$ und $f_2(x) = e^{-x}$ einzeln bestimmt werden. Ihre Summe ist dann eine partikuläre Lösung zu der Gesamtinhomogenität $f(x) = 1 + e^{-x}$.

Die partikuläre Lösung $y_{p,1}(x) = -\frac{1}{4}$ zur Inhomogenität f_1 kann geraten werden.

Für eine partikuläre Lösung $y_{p,2}$ zur Inhomogenität f_2 machen wir den Ansatz von der Form der rechten Seite. Da -1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet dieser $y_{p,2}(x) = Cxe^{-x}$. Es gilt

$$y'_{p,2}(x) = C(1 - x)e^{-x}, \qquad y''_{p,2}(x) = C(x - 2)e^{-x}, \qquad y'''_{p,2}(x) = C(3 - x)e^{-x}.$$

Die Konstante C wird durch Einsetzen in die DGL bestimmt, also

$$C(3 - x)e^{-x} + C(x - 2)e^{-x} - 4C(1 - x)e^{-x} - 4Cxe^{-x} = e^{-x} \Rightarrow C = -\frac{1}{3}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}xe^{-x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Bei der DGL handelt es sich um eine Eulersche DGL. Substituiere also $x = e^t$ und setze $v(t) = y(e^t)$. Dann ist $v'(t) = e^t y'(e^t)$ und $v''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$. Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned} x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) &= \ln(x) \\ \Leftrightarrow e^{2t}y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) &= t \\ \Leftrightarrow v''(t) - 4e^t y'(e^t) + 4y(e^t) &= t \\ \Leftrightarrow v''(t) - 4v'(t) + 4v(t) &= t. \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare, inhomogene DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Damit bilden v_1 und v_2 mit

$$v_1(t) = e^{2t}, \qquad v_2(t) = te^{2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem für die obige DGL.

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz von der Form der rechten Seite $v_p(t) = C_1 t + C_0$. Einsetzen in die DGL liefert

$$-4C_1 + C_1 t + 4C_0 = t \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4},\, C_0 = \frac{1}{4}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL für v

$$v(t) = \frac{t+1}{4} + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution $x = \ln(t)$ liefert die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL

$$y(x) = \frac{\ln(t)+1}{4} + C_1 t^2 + C_2 t^2 \ln(t)$$

für alle $t > 0$.

Aufgabe 20:

Wir machen einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Dann ist

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y''(x) - xy'(x) + 2y(x) \quad &= \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + (2-n)c_n\right] x^n \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die äquivalente Aussage

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (2-n)c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_{n+2} = \frac{(n-2)}{(n+2)(n+1)} c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir wählen $c_0 = 1$ und $c_1 = 0$ und schließen aus der obigen Rekurrenzgleichung auf $c_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, sowie $c_2 = -1$ und $c_{2k} = 0$ für alle $k > 1$. Damit ist $y_1(x) = 1 - x^2$ eine Lösung der Differentialgleichung.

Nun wählen wir $c_0 = 0$ und $c_1 = 1$ und schließen aus der obigen Rekurrenzgleichung auf $c_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, sowie ($n = 2k+1$, „scharfes Hinsehen“™)

$$\begin{aligned} c_{2k+3} \quad &= \quad \frac{(2k-1)}{(2k+2)(2k+3)} c_{2k+1} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)(2k)} c_{2k-1} = \dots \\ &= \quad \frac{\prod_{j=0}^{k}(2j-1)}{(2k+3)!} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. So erhalten wir eine zweite, zu y_1 linear unabhängige, Lösung y_2 mit

$$y_2(x) = x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{k}(2j-1)}{(2k+3)!} x^{2k+3} = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j-1)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j-1)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 21:

(i) Wie in Aufgabe 18 liefert der abgewandelte Potenzreihenansatz die determinierende Gleichung (an der DGL ablesen!)

$$f(\rho) = \rho(\rho-1) + \frac{3}{4}\rho = \rho\left(\rho - \frac{1}{4}\right) = 0,$$

sowie die Rekurrenzgleichung

$$f(n+\rho)c_n - \frac{3}{4}c_{n-1} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die determinierende Gleichung hat genau die Lösungen $\rho_2 = 0$ und $\rho_1 = \frac{1}{4}$. Da $\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{4} \notin \mathbb{N}$, führt die Rekurrenzgleichung mit $\rho = \rho_1$ bzw. $\rho = \rho_2$ zu linear unabhängigen Lösungen y_1 und y_2 der DGL.

- $\rho_1 = \frac{1}{4}$: In diesem Fall lautet die Rekurrenzgleichung

  $$c_n = \frac{3c_{n-1}}{4n\left(n+\frac{1}{4}\right)} = \frac{3c_{n-1}}{n(4n+1)} = \ldots = \frac{3^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(4j+1)}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

  $$y_1(x) = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(4j+1)} x^n$$

  für alle $x > 0$.

- $\rho_2 = 0$: In diesem Fall lautet die Rekurrenzgleichung

  $$c_n = \frac{3c_{n-1}}{4n\left(n-\frac{1}{4}\right)} = \frac{3c_{n-1}}{n(4n-1)} = \ldots = \frac{3^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(4j-1)}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und damit

  $$y_2(x) = \sum_{n=0} \frac{3^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(4j-1)} x^n$$

  für alle $x > 0$.

(ii) Der abgewandelte Potenzreihenansatz liefert die determinierende Gleichung

$$f(\rho) = \rho(\rho-1) + 3\rho + 1 = \rho^2 + 2\rho + 1 = (\rho+1)^2 = 0,$$

sowie die Rekurrenzgleichungen

$$\begin{aligned} f(1+\rho)c_1 &= 0, \\ f(n+\rho)c_n + 4c_{n-2} &= 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die determinierende Gleichung hat genau die Lösung $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Damit bekommen wir mit dem abgewandelten Potenzreihenansatz nur eine Lösung y_1 der Differentialgleichung.

- $\rho_1 = -1$: In diesem Fall lauten die Rekurrenzgleichungen

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_n &= -\frac{4c_{n-2}}{n^2} \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Damit folgt $c_{2k+1} = 0$, sowie

$$c_{2k} = -\frac{4c_{2(k-1)}}{(2k)^2} = -\frac{c_{2(k-1)}}{k^2} = \ldots = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$y_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{2n}$$

für alle $x > 0$.

- y_2 : Wir machen den Ansatz

$$y_1(x) = \ln(x) y_1(x) + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} xy_1'(x) &= x\ln(x)y_2'(x) + y_2(x) + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n(n-1)x^n, \\ x^2 y_1''(x) &= x^2\ln(x)y_2''(x) + 2xy_2'(x) - y_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(n-1)(n-2)x^n. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert (ln-Terme fallen weg!)

$$\begin{aligned} & x^2 y_2''(x) + 3xy_2'(x) + (1+4x^2)y_2(x) \\ = \; & 2xy_1'(x) - y_1(x) + 3y_1(x) \\ & + \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-1)(n-2) + 3(n-1) + 1\right] d_n x^n + 4\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{n+2}\right) \\ = \; & 2xy_1'(x) + 2y_1(x) + \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 d_n x^n + 4\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{n+2}\right) \\ = \; & \frac{1}{x}\left[2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{(n!)^2} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{2n}\right)\right] \\ & + \frac{1}{x}\left[d_1 x + 4d_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 d_n + 4d_{n-2}) x^n\right] = 0 \\ \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \; & 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2} x^{2n} + d_1 x + 4d_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 d_n + 4d_{n-2}) x^n \\ = \; & d_1 x + 4(d_2 - 1)x^2 + 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2} x^{2n} \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} 4k^2 d_{2k} + 4d_{2(k-1)} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} ((2k+1)^2 d_{2k+1} + 4d_{2k-1}) x^{2k+1} = 0. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die äquivalente Bedingung

$$\begin{aligned} d_1 &= 0, \qquad d_{2k+1} = -\frac{4}{(2k+1)^2} d_{2k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ d_2 &= 1, \qquad d_{2k} = -\frac{d_{2(k-1)} + \frac{(-1)^k k}{(k!)^2}}{k^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{k(k!)^2} - \frac{d_{2(k-1)}}{k^2} \qquad \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Damit ist $d_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, sowie

$$\begin{aligned} d_{2k} &= \frac{(-1)^{k+1}}{k(k!)^2} - \frac{d_{2(k-1)}}{k^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{1}{k} + \frac{(k!)^2}{(-1)^k k^2} d_{2(k-1)} \right) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{1}{k} + \frac{((k-1)!)^2}{(-1)^k} d_{2(k-1)} \right) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{1}{k} + \frac{((k-1)!)^2}{(-1)^k} \cdot \frac{(-1)^k}{((k-1)!)^2} \left(\frac{1}{k-1} + \frac{((k-2)!)^2}{(-1)^{k-1}} d_{2(k-2)} \right) \right) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \frac{((k-2)!)^2}{(-1)^{k-1}} d_{2(k-2)} \right) = \dots \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{1} \right) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Definiere $h_k := \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$ (k-te Partialsumme der harmonischen Reihe). Es folgt

$$y_2(x) = \ln(x) y_1(x) + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} h_n x^{2n}$$

für alle $x > 0$.

(iii) Zunächst halten wir fest, dass

$$\frac{2x}{1-x} = 2x \sum_{n=0}^\infty x^n = 2 \sum_{n=1}^\infty x^n$$

für alle $0 < x < 1$ gilt (geometrische Reihe). In der Notation des Skriptes (Abschnitt 25.14) ist also

$$p_j = 2\delta_0(j), \quad q_j = 2(1 - \delta_0(j)) \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Die determinierende Gleichung lautet also

$$f(\rho) = \rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = \rho(\rho + 1) = 0,$$

die Rekurrenzgleichung

$$(n + \rho)(n + \rho + 1) c_n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_k = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Lösungen der determinierenden Gleichung sind gerade $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = -1$. Wegen $\rho_1 - \rho_2 = 1 \in \mathbb{N}$, bekommen wir mit dem abgewandelten Potenzreihenansatz möglicherweise nur eine Lösung y_1 der Differentialgleichung.

- $\rho_1 = 0$: In diesem Fall lautet die Rekurrenzgleichung

$$c_n = -\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es ist demnach

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = -\frac{2}{2} = -1, \qquad c_2 = -\frac{2}{6}(1-1) = 0, \qquad c_3 = -\frac{2}{12}\sum_{k=0}^{2} c_k = 0.$$

Daraus ist $c_n = 0$ für alle $n \geq 2$ ablesbar. Also ist

$$y_2(x) = 1 - x$$

für alle $0 < x < 1$ eine Lösung der Differentialgleichung.

- $\rho_1 = -1$: Wir versuchen zunächst den „logarithmusfreien“ Ansatz. In diesem Fall lautet die Rekurrenzgleichung

$$n(n-1)c_n + 2\sum_{k=0}^{n-1} c_k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ($n = 1$), soll $c_0 = 0$ gelten, was einen Widerspruch zur Wahl $c_0 = 1$ darstellt (nur die triviale Lösung $y_1 \equiv 0$ befriedigt den gewählten Ansatz).

Zielführend ist also der „logarithmusbehaftete” Ansatz

$$y_2(x) = \ln(x) y_1(x) + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

Rechnerisch ist es in diesem Fall jedoch einfacher, das Reduktionsverfahren von d'Alembert ($y_2(x) = v(x)y_1(x)$) direkt zu benutzen. Dies führt auf eine lineare DGL erster Ordnung

$$v''(x) + v'(x)\left(\frac{2y_2'(x)}{y_2(x)} + \frac{2}{x}\right) = 0$$

für v'. Wir berechnen

$$\int \frac{y_2'(x)}{y_2(x)}\mathrm{d}x = \ln(y_2(x)), \qquad \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x).$$

Damit ist

$$v'(x) = e^{-2\ln(x) - 2\ln(y_1(x))} = e^{-2\ln(x(1-x))} = \left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^2$$

eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung für v'. Es gilt ferner (Partialbruchzerlegung)

$$\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

für alle $0 < x < 1$. Folglich ist

$$\int v'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + 2\ln(x) - 2\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}.$$

Somit ist

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = 2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)(1-x) \qquad \forall 0 < x < 1$$

eine weitere Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3phys2017w/