Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
06.12.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

05. Übungsblatt

Aufgabe 22:
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass die folgenden Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind. Berechnen Sie mit Hilfe der s.g. *Picard-Iteration* aus Abschnitt 26.4 der Vorlesung lokal die Lösung. Wie lautet jeweils die maximale Lösung?

(i) $y' = -y$ mit $y(0) = -1$ und

(ii) $y' = (1 + y)\cos(x)$ mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 23:
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x, y, y') = x^2 - 2xy' + \frac{3}{2}(y')^2 - y \qquad \forall (x, y, y') \in \mathbb{R}^3.$$

Für ein $(x_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$ gelte $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ und $y_0' \neq \frac{2}{3}x_0$. Zeigen Sie, dass die implizite Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ lokal eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 24:
Betrachten Sie die Abbildung $T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ definiert durch

$$(Tf)(x) := x \int_0^x t f(t) \mathrm{d}t + 1$$

für alle $x \in [0, 1]$ und alle $f \in C(\mathbb{R})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass T genau einen Fixpunkt $f_* \in C([0, 1])$ besitzt. Welches Anfangswertproblem löst f_*?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $(C([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 25:

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass die folgenden Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind. Berechnen Sie mit Hilfe der s.g. *Picard-Iteration* aus Abschnitt 26.4 der Vorlesung lokal die Lösung. Wie lautet jeweils die maximale Lösung?

(i) $y' = xy$ mit $y(0) = 1$ und

(ii) $y' = 2xy + 2x^3$ mit $y(0) = 0$.

Aufgabe 26:

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x, y, y') = xy' - y' \arctan(y') + \frac{1}{2}\left(1 + (y')^2\right) - y \qquad \forall (x, y, y') \in \mathbb{R}^3.$$

Für ein $(x_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$ gelte $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ und $y_0' \neq \tan(x_0)$. Zeigen Sie, dass die implizite Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ lokal eindeutig lösbar ist.

Hinweis: Satz über implizit definierte Funktionen.

Aufgabe 27:

Sei $g \in C([0, 1])$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^x f(x - t)e^{-t^2} \mathrm{d}t = g(x)$$

genau eine Lösung $f \in C([0, 1])$ besitzt.

Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz.

Hinweis: Aufgaben 22,23 und 24 werden voraussichtlich in der großen Saalübung besprochen. Die restlichen Aufgaben werden im Tutorium behandelt.