Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
15.12.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 05. Übungsblatt

Aufgabe 22:

(i) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x, y) = -y$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist F stetig und stetig partiell nach y differenzierbar:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -1 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Das zu lösende Anfangswertproblem ist also

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(0) = -1.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf aus Abschnitt 26.2 der Vorlesung hat es also eine eindeutige maximale Lösung.

Die Picard-Iteration (vgl. Abschnitt 2.4 der Vorlesung) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_{n+1}(x) &= -1 - \int_0^x y_n(t)\mathrm{d}t \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -1 + \int_0^x 1\mathrm{d}t = -1 + x, \\ y_2(x) &= -1 - \int_0^x (-1+t)\mathrm{d}t = -1 + x - \frac{1}{2}x^2, \\ y_3(x) &= -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3, \\ y_4(x) &= -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies legt die Behauptung

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Tatsächlich gilt (Beweis durch vollständige Induktion):

- **IA** ($n = 0$):

$$y_0(x) = -1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- **IS** ($n \curvearrowright n+1$): Gelte die (**IH**)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= -1 - \int_0^x y_n(t)\mathrm{d}t \overset{\text{(IH)}}{=} -1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^x t^k \mathrm{d}t \\ &= -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)} x^{k+1} = -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} -1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iterierte für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen

$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = -e^{-x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung bestätigt

$$y'(x) = e^{-x} = -y(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist y auch die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) In diesem Fall ist $F(x,y) = (1+y)\cos(x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wieder ist F stetig und stetig partiell nach y differenzierbar:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cos(x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist also das gegebene Anfangswertproblem eindeutig lösbar.

Für die Picard-Iteration gilt

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1, \\ y_1(x) &= 1 + \sin(x) + \int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t = 1 + 2\sin(t), \\ y_2(x) &= 1 + \sin(x) + \sin(x) + 2\int_0^x \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 1 + 2\sin(x) + \sin^2(x), \\ y_3(x) &= 1 + \sin(x) + \sin(x) + \sin^2(x) + \frac{1}{3}\sin^3(x) = 1 + 2\sin(x) + \sin^2(x) + \frac{1}{3}\sin^3(x), \\ y_4(x) &= 1 + 2\sin(x) + \sin^2(x) + \frac{1}{3}\sin^3(x) + \frac{1}{3\cdot 4}\sin^4(x), \\ y_5(x) &= 2\left(1 + \sin(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x) + \frac{1}{2\cdot 3}\sin^3(x) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\sin^4(x) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5(x)\right) - 1 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies motiviert die Behauptung

$$y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\sin(x))^k - 1 \quad \forall x \in R$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Tatsächlich gilt (Beweis durch vollständige Induktion):

- **IA** ($n = 0$):
$$y_0(x) = 1 = 2\left(\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}(\sin(x))^k\right) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  IS ($n \curvearrowright n+1$): Gelte die (**IH**)
$$y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\sin^k(x) - 1 \quad \forall x \in R$$

  für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n+1$:
$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= 1 + \sin(x) + \int_0^x y_n(t)\cos(t)\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{(IH)}}{=} 1 + \sin(x) + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^x \sin^k(t)\cos(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t \\
&= 1 + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(k+1)}\Big[\sin^{(k+1)}(t)\Big]_{t=0}^{x} = 1 + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\sin^{(k+1)}(x) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} 1 + 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\sin^k(x) = 2\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\sin^k(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iterierte für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen
$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\sin^k(x) - 1 = 2e^{\sin(x)} - 1.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung bestätigt
$$y'(x) = 2\cos(x)e^{\sin(x)} = (1 + e^{\sin(x)} - 1)\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist y auch die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 23:

Die in y' quadratische Gleichung
$$F(x, y, y') = x^2 - 2xy + \frac{3}{2}(y')^2 - y = 0$$

hat genau die Lösung(en)
$$y' = \frac{2}{3}x \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y - \frac{1}{3}x^2}.$$

Betrachte o.B.d.A. den Fall $y_0' > \frac{2}{3}x_0$ (wähle ansonsten den anderen Lösungszweig oben). Das AWP
$$y' = \frac{2}{3}x + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y - \frac{1}{3}x^2}, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{AWP'}$$

hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf auf $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, y > \frac{1}{3}x^2\right\}$ eine eindeutige maximale Lösung $y_{\max} : I_{\max} \to \mathbb{R}$. Das maximale Existenzintervall enthält ein abgeschlossenes Intervall $\tilde{I} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I_{\max}$ (für ein $\delta > 0$). Setze $\tilde{y} = y_{\max}|_{\tilde{I}}$.

Behauptung: Das ursprüngliche AWP

$$F(x, y, y') = 0, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0' \tag{AWP}$$

hat auf $D' = \left\{(x, y, z) \middle| F(x, y, z) = 0,\ z \neq \frac{2}{3}x,\ x \in \tilde{I}\right\}$ die eindeutige maximale Lösung $\tilde{y}$.

Beweis: Klar ist, dass $\tilde{y}$ eine maximale Lösung von (AWP) ist.

Angenommen, $y : \tilde{I} \supseteq I \to \mathbb{R}$ ist eine weitere Lösung von (AWP). Betrachte das größte Intervall, welches x_0 enthält und auf dem y mit $\tilde{y}$ übereinstimmt. Setze dazu

$$\begin{aligned} a &:= \inf\left\{x \in I \middle| \forall t \in (x, x_0) : y'(t) > \frac{2}{3}t\right\} \\ b &:= \sup\left\{x \in I \middle| \forall t \in (x_0, x) : y'(t) > \frac{2}{3}t\right\}, \\ J &:= (a, b). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von y' ist $J \neq \emptyset$. Ferner löst $y|_J$ per Konstruktion (AWP'). Zeige nun $J = \mathring{I}$. Angenommen, das wäre falsch, etwa $b < \sup I$. Dann gilt

$$\lim_{x \to b-} y'(x) = \lim_{x \to b-} \tilde{y}'(x) > \frac{2}{3}b.$$

Wegen der Stetigkeit von y', ist dann $y'(x) > \frac{2}{3}x$ auf einer Umgebung von b — im Widerspruch zur Definition von b. Also $b = \sup I$. Genauso sieht man $a = \inf I$ ein.

Enthält I einen seiner Randpunkte $c \in \{\inf I, \sup I\} \cap I$, so gilt $y'(c) = \tilde{y}'(c) > \frac{2}{3}c$ (wieder wegen Stetigkeit von y'). Insgesamt haben wir also $y'(x) > \frac{2}{3}x$ für alle $x \in I$ eingesehen.

Damit löst y (AWP'). Wegen der Eindeutigkeit der Maximallösung $y_{\max}$, gilt in der Tat $y = \tilde{y}|_I$.
□

Aufgabe 24:

Für jedes $f \in C([0, 1])$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Tf differenzierbar mit

$$(Tf)'(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x)$$

für alle $x \in [0, 1]$. Insbesondere ist Tf stetig und damit ist T eine Selbstabbildung von $C([0, 1])$. Ferner gilt für jedes $x \in [0, 1]$ und jedes $f, g \in C([0, 1])$

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tg)(x)| &= \left| x \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - x \int_0^x tg(t)\mathrm{d}t \right| \leq \underbrace{|x|}_{\leq 1} \int_0^x t \underbrace{|f(t) - g(t)|}_{\|f-g\|_\infty} \mathrm{d}t \\ &\leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 t\mathrm{d}t = \|f - g\|_\infty \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^1 = \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty . \end{aligned}$$

Setze $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Nach Obigem ist

$$\|Tf - Tg\|_\infty \leq \alpha \|f - g\|_\infty ,$$

also ist T eine Kontraktion.

Laut Hinweis ist $X := C([0, 1])$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ ein Banach-Raum. Natürlich ist dann $B = C([0, 1]) \subseteq X$ abgeschlossen. Nach dem Fixpunktsatz von Banach (vgl. Abschnitt 26.3 der Vorlesung) besitzt T genau einen Fixpunkt $f_* \in C([0, 1])$.

Wiederum nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $(Tf)'$ differenzierbar und es gilt

$$(Tf)''(x) = xf(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x) = x^2 f'(x) + 3xf(x)$$

für alle $x \in [0,1]$. Der Fixpunkt f_* löst deshalb das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f_*(0) &= 0\int_0^0 tf_*(t)\mathrm{d}t + 1 = 1, \\ f_*'(0) &= \int_0^0 tf_*(t)\mathrm{d}t + 0^2 f(0) = 0, \\ f_*''(x) &= 3xf_*(x) + x^2 f'(x) \quad \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Aufgabe 25:

(i) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) = xy$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist F stetig und stetig partiell nach y differenzierbar:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Das zu lösende Anfangswertproblem ist also

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(0) = 1.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf aus Abschnitt 26.2 der Vorlesung hat es also eine eindeutige maximale Lösung.

Die Picard-Iteration (vgl. Abschnitt 26.4 der Vorlesung) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x ty_n(t)\mathrm{d}t \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x t\mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2}, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}x^4, \\ y_3(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^6, \\ y_4(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies legt die Behauptung

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Tatsächlich gilt (Beweis durch vollständige Induktion):

- **IA** ($n = 0$):

$$y_0(x) = 1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{2^k k!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- **IS** ($n \curvearrowright n+1$): Gelte die (**IH**)

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x t y_n(t) \mathrm{d}t \overset{\text{(IH)}}{=} 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} \int_0^x t^{2k+1} \mathrm{d}t \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!(2k+2)} \left[t^{2k+2} \right]_{t=0}^{x} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!} x^{2(k+1)} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k k!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k k!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iterierte für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen

$$y(x) := \lim_{n \to \infty} y_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} x^{2k} = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung bestätigt

$$y'(x) = x e^{\frac{x^2}{2}} = x y(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist y auch die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) In diesem Fall ist $F(x,y) = 2xy + 2x^3$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wieder ist F stetig und stetig partiell nach y differenzierbar:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist also das gegebene Anfangswertproblem eindeutig lösbar.

Für die Picard-Iteration gilt

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= \int_0^x 2t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} x^4, \\ y_2(x) &= \frac{1}{2} x^4 + \int_0^x t^5 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{6} x^6, \\ y_3(x) &= \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3 \cdot 8} x^8, \\ y_4(x) &= \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3 \cdot 8} x^8 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 10} x^{10} = \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^6 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^8 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{10}, \\ y_5(x) &= \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^6 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^8 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{10} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^{12} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies motiviert die Behauptung

$$y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} x^{2k} \quad \forall x \in R$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Tatsächlich gilt (Beweis durch vollständige Induktion):

- **IA** ($n=0$):

$$y_0(x) = 0 = \sum_{k=2}^{1} \frac{1}{k!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

IS ($n \curvearrowright n+1$): Gelte die (**IH**)

$$y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} x^{2k} \quad \forall x \in R$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) \quad &= \quad \frac{x^4}{2} + 2\int_0^x t y_n(t)\mathrm{d}t \overset{\text{(IH)}}{=} \frac{x^4}{2} + 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \int_0^x t^{2k+1}\mathrm{d}t \\
&= \quad \frac{x^4}{2} + 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!(2k+2)} \left[t^{2k+2}\right]_{t=0}^{x} = \frac{x^4}{2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k+1)!} x^{2(k+1)} \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \quad \frac{x^4}{2} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k!} x^{2k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iterierte für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen

$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} x^{2k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} x^{2k} - x^2 - 1 = e^{x^2} - x^2 - 1.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung bestätigt

$$y'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - x^2 - 1) + 2x^3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist y auch die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 26:

Berechne

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = x - \arctan(y').$$

Nach Voraussetzung ist $\tan(x_0) \neq y_0$. Also ist $\frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$ und $F(x_0, y_0, y_0') = 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (vgl. Abschnitt 19.15 von HM2) existieren offene Mengen $(x_0, y_0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, $y_0' \in V \subseteq \mathbb{R}$ und ein $G \in C^1(U, V)$ derart, dass

$$F(x, y, y') = 0 \Leftrightarrow y' = G(x, y) \qquad \forall (x, y) \in U\, \forall y' \in V.$$

Betrachte das AWP

$$y' = G(x, y) \quad (x, y) \in U, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{AWP'}$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf, hat (AWP') die eindeutige maximale Lösung $y_{\max} : I_{\max} \to \mathbb{R}$. Wegen der Stetigkeit von $y'_{\max}$, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $\tilde{I} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I_{\max}$ und $y'_{\max}(x) \in V$ für alle $x \in \tilde{I}$. Setze $\tilde{y} := y_{\max}|_{\tilde{I}}$.

Behauptung: Das ursprüngliche AWP

$$F(x, y, y') = 0, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0' \tag{AWP}$$

hat auf $D' = \left\{ (x,y,z) | \, F(x,y,z) = 0, \; z \neq \tan(x), \; x \in \tilde{I} \right\}$ die eindeutige maximale Lösung $\tilde{y}$.

Beweis: Klar ist, dass $\tilde{y}$ eine maximale Lösung von (AWP) ist.

Angenommen, $y : \tilde{I} \supseteq I \to \mathbb{R}$ ist eine weitere Lösung von (AWP). Betrachte das größte Intervall, welches x_0 enthält und auf dem y mit $\tilde{y}$ übereinstimmt. Setze dazu

$$\begin{aligned} a &:= \inf \{ x \in I | \, \forall t \in (x, x_0) : y(t) = \tilde{y}(t) \}, \\ b &:= \sup \{ x \in I | \, \forall t \in (x_0, x) : y(t) = \tilde{y}(t) \}, \\ J &:= (a, b). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von y und y', gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $(x, y(x)) \in U$ und $y'(x) \in V$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ausfällt. Dann löst y aber auch (AWP') und wegen der Maximalität von $y_{\max}$ ist $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Also $J \neq \emptyset$. Ferner löst $y|_J$ per Konstruktion (AWP'). Zeige nun $J = \mathring{I}$. Angenommen, das wäre falsch, etwa $b < \sup I$. Dann gilt

$$\lim_{x \to b-} y'(x) = \lim_{x \to b-} \tilde{y}'(x) \in V.$$

Wegen der Stetigkeit von y', ist dann $y'(x) \in V$ auf einer Umgebung von b — im Widerspruch zur Definition von b. Also $b = \sup I$. Genauso sieht man $a = \inf I$ ein.

Enthält I einen seiner Randpunkte $c \in \{\inf I, \sup I\} \cap I$, so gilt $y'(c) = \tilde{y}'(c) \in V$ (wieder wegen Stetigkeit von y'). Insgesamt haben wir also $y'(x) \in V$ für alle $x \in I$ eingesehen.

Damit löst y (AWP'). Wegen der Eindeutigkeit der Maximallösung $y_{\max}$, gilt in der Tat $y = \tilde{y}|_I$.
□

Aufgabe 27:

Wir formen die gegebene Gleichung äquivalent zu einer Fixpunktgleichung um

$$f(x) = g(x) + \int_0^x f(x-t) e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

und fassen die rechte Seite als Definition eines Operators $T : C([0,1]) \to [0,1]^{\mathbb{R}}$ auf, d.h.

$$(Tf)(x) := g(x) + \int_0^x f(x-t) e^{-t^2} \mathrm{d}t \qquad \forall f \in C([0,1]) \, \forall x \in [0,1]$$

Wir zeigen, dass T eine Selbstabbildung ist, also $Tf \in C([0,1])$ für jedes $f \in C([0,1])$. Sei dazu $f \in C([0,1])$, $\varepsilon > 0$. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist f beschränkt — etwa $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [0,1]$ — und gleichmäßig stetig (siehe Abschnitt 11.9 der Vorlesung HM1). Also existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für jedes $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{x+h} f(x+h-t) e^{-t^2} \mathrm{d}t - \int_0^x f(x-t) e^{-t^2} \mathrm{d}t \right| &\leq \int_x^{x+h} \underbrace{|f(x+h-t)|}_{\leq M} \underbrace{e^{-t^2}}_{\leq 1} \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^x \underbrace{|f(x+h-t) - f(x-t)|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{e^{-t^2}}_{\leq 1} \mathrm{d}t \\ &\leq |h| \, M + \varepsilon \, |x| \leq |h| \, M + \varepsilon \end{aligned}$$

für jedes $x \in [0,1]$ und alle $|h| < \delta$ mit $x+h \in [0,1]$. Also ist

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{x+h} f(x+h-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x f(x-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

für jedes $x \in [0,1]$ und deshalb ist $x \mapsto \int_0^x f(x-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ stetig. Da $g \in C([0,1])$, ist Tf tatsächlich stetig.

Wir zeigen ferner, dass T eine Kontraktion ist. Seien dazu $f, g \in C([0,1])$ und $x \in [0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tg(x)| &= \left|\int_0^x (f(x-t) - g(x-t))e^{-t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \underbrace{|f(x-t) - g(x-t)|}_{\leq \|f-g\|_\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&\leq \|f-g\|_\infty \int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \|f-g\|_\infty \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{e^{-t^2}}_{\leq 1}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{e^{-t^2}}_{\leq e^{-\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t\right) \\
&\leq \|f-g\|_\infty \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\overbrace{e^{-\frac{1}{4}}}^{<1}}{2}\right)}_{=:\alpha<1} = \alpha \|f-g\|_\infty ,
\end{aligned}$$

also $\|Tf - Tg\|_\infty \leq \alpha \|f-g\|_\infty$. Nach dem Fixpunktsatz von Banach hat T genau einen Fixpunkt $f_* \in C([0,1])$.

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3phys2017w/