Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
20.12.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

06. Übungsblatt

Aufgabe 28:

Betrachten Sie für ein Intervall $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ und stetige $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$

$$z' = Az + b. \tag{1}$$

Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des homogenen Systems $z' = Az$ und $w : I \to \mathbb{R}$ ihre Wronski-Determinante.

Zeigen Sie, dass w der DGL $w' = \mathrm{Spur}(A)w$ genügt.

Hinweis: Determinantenentwicklungssatz, $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ für $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$.

Aufgabe 29:

Betrachten Sie für ein Intervall $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ und stetige $f, p_0, \ldots, p_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ die DGL

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0 y = f. \tag{2}$$

(a) Führen Sie (2) in die Form (1) über.

(b) Seien $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen des in (a) berechneten Systems der Form (1), w ihre Wronski-Determinante und $x_0 \in I$.

Zeigen Sie, dass w die *Abelsche Formel* $w(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau}$ für alle $x \in I$ erfüllt.

Hinweis: Aufgabe 28.

Aufgabe 30:

Berechnen Sie e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ und

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(iii) $A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ und

(iv) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

Aufgabe 31:

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ e^{3x} \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 32:
Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -7 & -4 \\ -7 & 5 & -4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} y(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33:
Betrachten Sie für ein Intervall $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ und stetige $p, q, f : I \to \mathbb{R}$

$$y'' + py' + qy = f. \tag{3}$$

Seien $x_0 \in I$, $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem zu (3) und $w : I \to \mathbb{R}$ ihre Wronski-Determinante.

(a) Zeigen Sie, dass

$$y_p(x) = -y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{f(\tau)y_2(\tau)}{w(\tau)}\mathrm{d}\tau + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{f(\tau)y_1(\tau)}{w(\tau)}\mathrm{d}\tau \qquad \forall x \in I \tag{4}$$

eine partikuläre Lösung von (3) definiert.

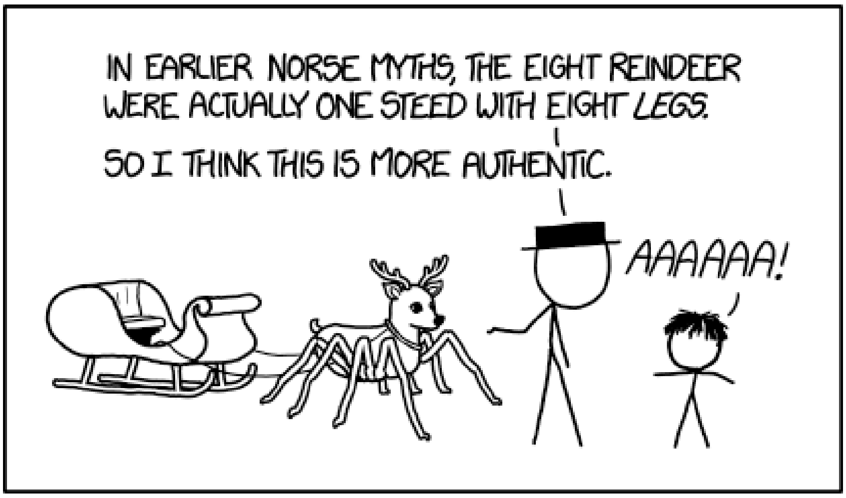
Hinweis: Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 27.1 der Vorlesung.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (4) die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y''(x) + \frac{1}{2x}y'(x) + \frac{1}{4x}y(x) = \frac{1}{4} \qquad (x > 0)$$

Hinweis: Aufgabe 18 (i).

Wir wünschen Ihnen erholsame Weihnachtsfeiertage und ein gutes neues Jahr 2018!



Quelle: http://www.xkcd.com/1776/ **Urheber:** Randall Munroe

Hinweis: Aufgaben 28,29 und 30 werden voraussichtlich in der großen Saalübung besprochen. Die restlichen Aufgaben werden im Tutorium behandelt.