Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
12.01.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 06. Übungsblatt

Aufgabe 28:
Wir erinnern uns an den Entwicklungssatz (vgl. Abschnitt 17.6 in HM2). Nach diesem gilt für jede Matrix $B = (b_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ die Formel

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} b_{ik} \det(B_{ik}).$$

Dabei bezeichnet B_{ik} die Matrix, die aus B durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht. Daraus folgt, dass die Abbildung $\det : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und

$$\frac{\partial \det}{\partial b_{ij}}(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \underbrace{\frac{\partial b_{ik}}{\partial b_{ij}}}_{=\delta kj} \det(B_{ik}) = (-1)^{i+j} \det(B_{ij}) \tag{1}$$

für alle $i, j \in \{1,\dots,n\}$ gilt.

Für jedes $i, j \in \{1,\dots,n\}$ bezeichne $\varphi_{ij} = (\varphi_j|\vec{e}_i)$ die i-te Komponente der j-ten Lösunung φ_j der homogenen Gleichung. Ferner sei $\Phi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t)\, \varphi_2(t) \,\cdots\, \varphi_n(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I.$$

Da φ_j Lösung des homogenen Systems für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$ ist, gilt $\Phi' = A\Phi$ bzw.

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\varphi_{kj}(t) \qquad \forall i, j \in \{1,\dots,n\}\ \forall t \in I. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}(\det\circ\Phi)}{\mathrm{d}t}(t) &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \det}{\partial b_{ij}}(\Phi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(\Phi_{ij}(t)) \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\varphi_{kj}(t) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(\Phi_{ij}(t))\varphi_{kj}(t) \qquad \forall t \in I. \end{aligned} \tag{3}$$

Nach dem Determinantenentwicklungssatz gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $t \in I$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(\Phi_{ij}(t))\varphi_{kj}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k1}(t) & \varphi_{k2}(t) & \cdots & \varphi_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k1}(t) & \varphi_{k2}(t) & \cdots & \varphi_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} = \delta_{ik} \det(\Phi(t)).$$

Einsetzen in (3) liefert schließlich

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t)\delta_{ik} w(t) = w(t) \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) = \operatorname{Spur}(A(t))w(t) \qquad \forall t \in I.$$

□

Aufgabe 29:

(a) Einsetzen von $z_1 = y$, $z_2 = y'$, …, $z_n = y^{(n-1)}$ in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= z_n'(x) = f(x) - p_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_0(x)y(x) \\ &= -p_{n-1}(x)z_n - \ldots - p_0(x)z_1(x) + f(x) \qquad (x \in I). \end{aligned}$$

Damit ist jede Lösung der Differentialgleichung auch Lösung des folgenden linearen, inhomogenen Systems $z'(t) = A(t)z(t) + b(t)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & \cdots & -p_{n-2}(t) & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in I).$$

Umgekehrt, erfüllt jede Lösung des obigen Systems $z_1' = z_2$, $z_2' = z_1'' = z_3$, …, $z_{n-1}' = z_1^{n-1} = z_n$ und

$$z_n' = z_1^{(n)} = -p_0 z_1 - p_1 z_2 - \ldots p_{n-1} z_n + f = -p_0 z_1 - p_1 z_1' - \ldots - p_{n-1} z_1^{n-1} + f.$$

Damit löst z_1 die ursprüngliche Differentialgleichung.

(b) Nach der vorhergehenden Teilaufgabe gehört zu jeder Lösung y_j der homogenen Differentialgleichung eine Lösung z_j des homogenen, linearen Systems ($j \in \{1, \dots, n\}$). Setze $z_{ij} := (z_j | \vec{e}_i) = y_j^{(i-1)}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Für die Wronski-Determinante w gilt

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \cdots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \cdots & z_{2n}(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \cdots & z_{nn}(x) \end{vmatrix} \qquad (x \in I).$$

Nach Aufgabe 28 gilt für w die Differentialgleichung

$$w'(x) = \operatorname{Spur}(A(x))w(x) \qquad (x \in I). \tag{4}$$

Ablesen liefert

$$\operatorname{Spur}(A(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) = -p_{n-1}(x) \qquad (x \in I).$$

Da es sich bei (4) um eine lineare, homogene Differentialgleichung handelt und $w(x_0)$ vorgegeben ist, gilt in der Tat

$$w(x) = w(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{Spur}(A(\tau))\mathrm{d}\tau} = w(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau} \qquad (x \in I).$$

Aufgabe 30:

(i) Für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 4\lambda + 8 \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Seine Nullstellen sind also

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{4-8} = 2 + 2\mathrm{i}, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2 - 2\mathrm{i}.$$

Wir bestimmen einen Eigenvektor $\vec{v}_1$ zu λ_1:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1-2\mathrm{i} & 5 \\ -1 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \;\Big|\cdot(-1+2\mathrm{i}) \quad & \sim \begin{pmatrix} 5 & -5+10\mathrm{i} \\ -1 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \;\Big|\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right) \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & -1+2\mathrm{i} \\ -1 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1+2\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow \vec{v}_1 & = \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nach Abschnitt 27.2 der Vorlesung bilden

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\right) = \operatorname{Re}\left(e^{2t}(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t))\begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \\
\varphi_2(t) &= \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} \sin(2t) - 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ für $y'(t) = Ay(t)$. Es gilt

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Inverse $[\Phi(0)]^{(-1)}$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad & \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;\Big|\cdot\tfrac{1}{2} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow [\Phi(0)]^{(-1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nach Abschnitt 27.5 der Vorlesung ist aber

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \Phi(t)\,[\Phi(0)]^{(-1)} = \frac{e^{2t}}{2}\left(\cos(2t)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin(2t)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= e^{2t}\left(\cos(2t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin(2t)}{2}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad (t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

(ii) Wir beobachten, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N} = I_3 + N,$$

sowie $I_3 N = N I_3 = N$ gilt. Damit gilt mit den Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion aus Abschnitt 27.5 der Vorlesung:

$$e^{tA} = e^{t(I_3+N)} = e^{tI_3} e^{tN} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Es gilt

$$e^{tI_3} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l I_3^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l I_3}{l!} = I_3 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} = e^t I_3.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ N^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow N^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall k \geq 3. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$e^{tN} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l N^l}{l!} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2$$

und somit

$$e^{tA} = e^t \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^3 \right) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 3t + 2t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 12 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(6-\lambda)+24 = \lambda^2 - 2\lambda - 24 + 24 = \lambda(\lambda - 2) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Es ist also $\operatorname{spec}(A) = \{0, 2\}$. Wir bestimmen die Eigenräume:

- $E_A(0)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_A(0) = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $E_A(2)$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \mid \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_A(2) = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nach Abschnitt 27.2 der Vorlesung bilden

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ für $y'(t) = Ay(t)$. Es gilt

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Inverse $[\Phi(0)]^{(-1)}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \; | \cdot (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow [\Phi(0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nach Abschnitt 27.5 der Vorlesung ist aber

$$e^{tA} = \Phi(t)[\Phi(0)]^{(-1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2e^{2t} \\ 1 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{2t} & -6 + 6e^{2t} \\ 1 - e^{2t} & -2 + 3e^{2t} \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(iv) Für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -2+\lambda & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2-te Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (2-\lambda)^2(6-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2(6-\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Es ist also $\operatorname{spec}(A) = \{2, 6\}$. Wir bestimmen die Eigenräume:

- $E_A(2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $E_A(6)$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \; | \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E_A(6) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit ist A diagonalisierbar, etwa $A = SDS^{(-1)}$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Inverse $S^{(-1)}$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \end{array} \quad
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-3) \quad \cdot 2 \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-3) \quad \cdot 2 \end{array} \\
&\Rightarrow \; S^{(-1)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wegen $A^l = (SDS^{(-1)})^l = SD^lS^{(-1)}$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l}{l!} = S \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l D^l}{l!} \right) S^{(-1)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} & e^{6t} \\ -e^{2t} & 0 & 2e^{6t} \\ 0 & -e^{2t} & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{6t} & e^{6t} - e^{2t} & e^{6t} - e^{2t} \\ 2e^{6t} - 2e^{2t} & 2e^{6t} + 2e^{2t} & 2e^{6t} - 2e^{2t} \\ e^{6t} - e^{2t} & e^{6t} - e^{2t} & e^{6t} + 3e^{2t} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 31:

Wir bestimmen zunächst ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung durch Berechnung der Matrixexponentialfunktion. Es ist

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N} \quad \text{und} \quad ND = DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Abschnitt 27.5 der Vorlesung ist folglich

$$e^{xA} = e^{x(D+N)} = e^{xD} e^{xN} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Es gilt

$$e^{xD} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} D^n = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall l \geq 2$$

ist

$$e^{xN} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} N^l = I_3 + xN \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

und damit

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & xe^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir können nun die Lösung des Anfangswertproblems mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 27.5 der Vorlesung berechnen: Mit

$$b(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ 3\xi \\ e^{3\xi} \end{pmatrix} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

ist die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $y_p(0) = \vec{0}$ durch

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_0^x e^{(x-\xi)A} b(\xi) \mathrm{d}\xi = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & xe^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-\xi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3\xi} & -\xi e^{-3\xi} \\ 0 & 0 & e^{-3\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 3\xi \\ e^{3\xi} \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi \\ &= \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & xe^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} \xi e^{-\xi} \\ 3\xi e^{-3\xi} - \xi \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & xe^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -(1+\xi)e^{-\xi} \\ -\left(\frac{1}{3} + \xi\right) e^{-3\xi} - \frac{\xi^2}{2} \\ \xi \end{pmatrix} \right]_{\xi=0}^{\xi=x} \\ &= \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & xe^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(1+x)e^{-x} + 1 \\ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} + x\right) e^{-3x} - \frac{x^2}{2} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - (1+x) \\ \frac{1}{3} e^{3x} - \left(\frac{1}{3} + x\right) + \frac{x^2}{2} e^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben. Die Lösung y_h der homogenen Gleichung, die den Anfangswerten

$$y_h(0) = \vec{y}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genügt, ist durch

$$y_h(x) = e^{xA} \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & xe^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

gegeben. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems y durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \begin{pmatrix} e^x - (1+x) \\ \frac{1}{3} e^{3x} - \left(\frac{1}{3} + x\right) + \frac{x^2}{2} e^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - (1+x) \\ \frac{7}{3} e^{3x} - \left(\frac{1}{3} + x\right) + \frac{x^2}{2} e^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Aufgabe 32:

Wir berechnen zunächst ein Fundamentalsystem: Sei

$$A := \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -7 & -4 \\ -7 & 5 & -4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{5}{6}-\lambda & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{6}-\lambda & -\frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{2}{6}-\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 5-6\lambda & -7 & -4 \\ -7 & 5-6\lambda & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-1) \end{array} \\
&= \frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 12-6\lambda & -12+6\lambda & 0 \\ -7 & 5-6\lambda & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\lambda \end{pmatrix} = \frac{2-\lambda}{36}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 5-6\lambda & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{2-\lambda}{36}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -2-6\lambda & -4 \\ 5 & 10 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1-ten Zeile}}{=}} \frac{2-\lambda}{36}\begin{pmatrix} -2-6\lambda & -4 \\ 10 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{2-\lambda}{36}((-2-6\lambda)(2-6\lambda)+40) = \frac{2-\lambda}{36}(36\lambda^2-4+40) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2+1) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Es ist also $\operatorname{spec}(A) = \{2, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Wir bestimmen nun die Eigenräume:

- $E_A(2)$:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{10}{6} \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot 6 \\ |\cdot 6 \\ |\cdot 6 \end{array} \sim \begin{pmatrix} -7 & -7 & -4 \\ -7 & -7 & -4 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-1) \leftarrow + \\ \cdot\left(\frac{7}{5}\right) \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ |\cdot\left(-\frac{1}{18}\right) \\ |\cdot\frac{1}{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_A(2) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

- $E_A(\mathrm{i})$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{5}{6}-\mathrm{i} & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{6}-\mathrm{i} & -\frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{2}{6}-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot 6 \\ \mid \cdot 6 \\ \mid \cdot 6 \end{array}
&\sim \begin{pmatrix} 5-6\mathrm{i} & -7 & -4 \\ -7 & 5-6\mathrm{i} & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 12-6\mathrm{i} & -12+6\mathrm{i} & 0 \\ -7 & 5-6\mathrm{i} & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{12-6\mathrm{i}} \\ \\ \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 5-6\mathrm{i} & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 7 \quad \cdot(-5) \\ + \\ \quad\ \ + \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2-6\mathrm{i} & -4 \\ 0 & 10 & 2-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \mid \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+3\mathrm{i} & 2 \\ 0 & 5 & 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (1-3\mathrm{i}) \\ \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 2-6\mathrm{i} \\ 0 & 5 & 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \quad\ \ + \\ + \\ \cdot(-2) \quad \cdot \frac{1}{5} \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \frac{1}{5} \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad E_A(\mathrm{i}) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

- $E_A(-\mathrm{i})$: Wird nicht benötigt.

Nach Abschnitt 27.2 der Vorlesung bilden

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\varphi_2(x) &= \operatorname{Re}\left(e^{\mathrm{i}x} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\cos(x) \\ 2\cos(x) \\ 3\sin(x)-\cos(x) \end{pmatrix}, \\
\varphi_3(x) &= \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}x} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ 2\sin(x) \\ -\sin(x)-3\cos(x) \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{pmatrix}$.

Nach Abschnitt 27.1 der Vorlesung erhält man durch

$$y_c(x) = \Phi(x)\vec{c} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

alle Lösungen der Differentialgleichung, wenn $\vec{c}$ den $\mathbb{R}^3$ durchläuft. Um die Anfangswerte

$$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu erfüllen, suchen wir also die Lösung $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\Phi(0)\vec{c} = \vec{y}_0.$$

Diese berechnet man mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mid \cdot \tfrac{1}{4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mid \left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems durch

$$y(x) = \Phi(x)\vec{c} = -\frac{1}{3}\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sin(x) \\ \frac{2}{3}\sin(x) \\ -\frac{1}{3}\sin(x) - \cos(x) \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Aufgabe 33:

(a) Mit den Ergebnissen der Aufgabe 29 schreiben wir zunächst die gegebene Differentialgleichung als System erster Ordnung $z'(t) = A(t)z(t) + b(t)$ um:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Die zu y_1, y_2 korrespondierenden Lösungen

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$$

des homogenen Systems bilden ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ von $z' = Az$. Die Inverse $\Phi^{(-1)}(\tau)$ der 2×2-Matrix $\Phi(\tau)$ ist nach Abschnitt 15.16 von HM1 durch

$$\Phi^{(-1)}(\tau) = \frac{1}{\det(\Phi(\tau))} \begin{pmatrix} y_2'(\tau) & -y_2(\tau) \\ -y_1(\tau) & y_1(\tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(\tau)} \begin{pmatrix} y_2'(\tau) & -y_2(\tau) \\ -y_1(\tau) & y_1(\tau) \end{pmatrix}$$

für alle $\tau \in I$ gegeben. Die Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 27.1 der Vorlesung liefert ($\vec{y}_0 = \vec{0}$) die folgende partikuläre Lösung von $z' = Az + b$:

$$\begin{aligned} z_p(x) &= \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{(-1)}(\tau) b(\tau) \mathrm{d}\tau = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{w(\tau)} \begin{pmatrix} y_2'(\tau) & -y_2(\tau) \\ -y_1(\tau) & y_1(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{w(\tau)} \begin{pmatrix} -f(\tau) y_2(\tau) \\ f(\tau) y_1(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \qquad (x \in I) \end{aligned}$$

Die erste Komponente von z_p ist nach Aufgabe 29 eine partikuläre Lösung y_p der ursprünglichen Differentialgleichung. Ausführen des Vektor-Matrix-Produktes und Ablesen liefert die zu zeigende Formel

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left(\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \end{pmatrix} \mid \int_{x_0}^{x} \frac{1}{w(\tau)} \begin{pmatrix} -f(\tau)y_2(\tau) \\ f(\tau)y_1(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \right) \\ &= -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{f(\tau)y_2(\tau)}{w(\tau)} \mathrm{d}\tau + y_2(x) \int_{x_o}^{x} \frac{f(\tau)y_1(\tau)}{w(\tau)} \mathrm{d}\tau \qquad (x \in I). \end{aligned}$$

□

(b) Nach Aufgabe 18 (i) bilden

$$y_1(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right), \qquad y_2(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right) \qquad (x > 0)$$

ein Fundamentalsystem von

$$x^2 y''(x) + \frac{x}{2} y'(x) + \frac{x}{4} y(x) = 0 \Leftrightarrow y''(x) + \frac{1}{2x} y'(x) + \frac{1}{4x} y(x) = 0 \qquad (x > 0).$$

Die Wronski-Determinante w dieses Fundamentalsystems ist durch

$$\begin{aligned} w(x) &= \begin{vmatrix} \cos\left(\sqrt{x}\right) & \sin\left(\sqrt{x}\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\left(\sqrt{x}\right) & \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\left(\sqrt{x}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\cos^2\left(\sqrt{x}\right) + \sin^2\left(\sqrt{x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x > 0 \end{aligned}$$

gegeben.

Mit $f(x) = \frac{1}{4}$ für alle $x > 0$ ist nach der vorhergehenden Teilaufgabe also

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x) \int \frac{f(\tau)y_2(\tau)}{w(\tau)} \mathrm{d}\tau + y_2(x) \int \frac{f(\tau)y_1(\tau)}{w(\tau)} \mathrm{d}\tau \\ &= \sin\left(\sqrt{x}\right) \int \cos\left(\sqrt{x}\right) \frac{\sqrt{x}}{2} \mathrm{d}x - \cos\left(\sqrt{x}\right) \int \sin\left(\sqrt{x}\right) \frac{\sqrt{x}}{2} \mathrm{d}x \qquad (x > 0). \end{aligned}$$

Berechnung der obigen Stammfunktionen liefert

$$\begin{aligned} \int \cos\left(\sqrt{x}\right) \frac{\sqrt{x}}{2} \mathrm{d}x &\underset{\mathrm{d}x = 2\tau \mathrm{d}\tau}{\overset{\tau = \sqrt{x}}{=}} \int \underbrace{\tau^2}_{=u} \underbrace{\cos(\tau)}_{=v'} \mathrm{d}\tau \overset{\text{Part. Int.}}{=} \tau^2 \sin(\tau) - 2 \int \underbrace{\tau}_{=u} \underbrace{\sin(\tau)}_{=v'} \mathrm{d}\tau \\ &\overset{\text{Part. Int.}}{=} x \sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\tau \cos(\tau) - 2 \int \cos(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= x \sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\sqrt{x} \cos\left(\sqrt{x}\right) - 2 \sin\left(\sqrt{x}\right), \\ \int \sin\left(\sqrt{x}\right) \frac{\sqrt{x}}{2} \mathrm{d}x &\underset{\mathrm{d}x = 2\tau \mathrm{d}\tau}{\overset{\tau = \sqrt{x}}{=}} \int \underbrace{\tau^2}_{=u} \underbrace{\sin(\tau)}_{=v'} \mathrm{d}\tau \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\tau^2 \cos(\tau) + 2 \int \underbrace{\tau}_{=u} \underbrace{\cos(\tau)}_{=v'} \mathrm{d}\tau \\ &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -x \cos\left(\sqrt{x}\right) + 2\tau \sin(\tau) - 2 \int \sin(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= -x \cos\left(\sqrt{x}\right) + 2\sqrt{x} \sin\left(\sqrt{x}\right) + 2 \cos\left(\sqrt{x}\right) \qquad (x > 0). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x \sin^2\left(\sqrt{x}\right) + 2\sqrt{x} \sin\left(\sqrt{x}\right) \cos\left(\sqrt{x}\right) - 2 \sin^2\left(\sqrt{x}\right) \\ &\quad + x \cos^2\left(\sqrt{x}\right) - 2\sqrt{x} \cos\left(\sqrt{x}\right) \sin\left(\sqrt{x}\right) - 2 \cos^2\left(\sqrt{x}\right) \\ &= x - 2 \qquad (x > 0). \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung y der gegebenen Differentialgleichung durch

$$y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{x}\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{x}\right) + x - 2 \qquad \forall x > 0$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ gegeben.