Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Dr. Tobias Ried

WS 2017/18
17. Januar 2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 34 (Übung)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 3\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sin(2x-3t), && x,t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= xe^x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 35 (Übung)

Lösen Sie (formal) das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= 0, && x \in \mathbb{R},\ 0 < t < 1, \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \le 0, \\ 1-x & \text{für } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{für } x \ge 1, \end{cases} && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit dem Charakteristikenverfahren. Diskutieren Sie Ihre Lösung.

Aufgabe 36 (Übung)

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(\vec{x}) = 1, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

Erinnerung: Die Übungsklausur findet am Samstag, den **27. Januar 2018** von **10:00 bis 12:00** Uhr im Gaede-Hörsaal statt. Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 37 (Tutorium)

(a) Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= xe^y, && (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= x+1, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x},t) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{x},t) &= t^2(x-y+z), && \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(\vec{x},0) &= e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}}, && \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 38 (Tutorium)

(a) Betrachten Sie die eindimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x(x^2 u(x,t)) = 0, \qquad x,t > 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x), \qquad x > 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem Charakteristikenverfahren.

(b) Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} t\partial_t u(x,t) + \frac{t}{xu(x,t)}\partial_x u(x,t) + u(x,t) &= 0, && x,t > 0, \\ u(\xi,\xi^2) &= 1, && \xi > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 39 (Tutorium)

(a) Seien $0 < d < R < d'$, $q' \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$\Gamma(\vec{x} - d\vec{e}_z) + q'\Gamma(\vec{x} - d'\vec{e}_z) = 0$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{x}\| = R$, wobei Γ die Grundlösung der Laplace-Gleichung bezeichnet. Bestimmen Sie d' und q'.

(b) Sei $R > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{R^2 - \|\vec{x}\|^2}{4\pi R}\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}, \qquad x \in B(\vec{0},R),\ \vec{y} \in \partial B(\vec{0},R)$$

gilt. Dabei bezeichne G die Greensche Funktion für die Kugel $B(\vec{0},R) \subseteq \mathbb{R}^3$.