Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Dr. Tobias Ried

WS 2017/18
19. Januar 2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 34 (Übung)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$3\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sin(2x-3t), \qquad x,t \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = xe^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Das gegebene Anfangswertproblem lässt sich in der Form eines linearen Transportproblems äquivalent schreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \underbrace{\frac{3}{2}}_{=:a}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}\sin(2x-3t) =: g(x,t), \qquad x,t \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = xe^x =: f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nach Abschnitt 28.1 der Vorlesung ist seine Lösung durch

$$u(x,t) = f(x-ta) + \int_0^t g(x-(t-\tau)a,\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad x,t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Wir berechnen

$$\frac{1}{2}\int_0^x \sin\left(2\left(x-(t-\tau)\frac{3}{2}\right)-3\tau\right)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2x-3t)\,\mathrm{d}\tau = \frac{t}{2}\sin(2x-3t) \qquad x,t \in \mathbb{R},$$

womit

$$u(x,t) = \left(x-\frac{3t}{2}\right)e^{x-\frac{3t}{2}} + \frac{t}{2}\sin(2x-3t) \qquad x,t \in \mathbb{R}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems definiert.

Aufgabe 35 (Übung)

Lösen Sie (formal) das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ 0 < t < 1,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{für } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{für } x \geq 1, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

mit dem Charakteristikenverfahren. Diskutieren Sie Ihre Lösung.

Lösungsvorschlag: Wegen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = u'(x,t) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u(x,t) \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:a(x,t,u(x,t))}$$

liegt eine quasilineare Gleichung vor. Das charakteristische System (vgl. Abschnitt 28.3/4 der Vorlesung) für $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $w = u \circ k$ lautet also

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= a_1(k(s), w(s)) = u(k(s)) = w(s), && (1) \\ k_2'(s) &= a_2(k(s), w(s)) = 1, && (2) \\ w'(s) &= [u \circ k]'(s) = 0. && (3) \end{aligned}$$

Da die Anfangswerte für u bei $(x_0, 0)$ gegeben sind ($x_0 \in \mathbb{R}$), lauten die Anfangsbedingungen für die Charakteristiken

$$\begin{aligned} k_1(0) &= x_0, && (4) \\ k_2(0) &= 0, && (5) \\ w(0) &= u(k(0)) = u(x_0, 0). && (6) \end{aligned}$$

Die Lösung des charakteristischen Systems lautet

$$\begin{aligned} (3), (6) \Rightarrow w(s) &= u(x_0, 0), && (7) \\ (2), (5) \Rightarrow k_2(s) &= s, && (8) \\ (7), (1), (4) \Rightarrow k_1(s) &= u(x_0, 0)s + x_0. && (9) \end{aligned}$$

Zum gegebenen $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \leq t < 1$ versuchen wir nun die Gleichung

$$(x,t) = k(s) = k(s, x_0)$$

nach $(x_0, s) \in \mathbb{R}^2$ aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned}
k(s, x_0) &= (x, t) \\
\overset{(9),(8)}{\Leftrightarrow} x &= k_1(s) = u(x_0, 0)s + x_0 = \begin{cases} s + x_0 & \text{für } x_0 \leq 0, \\ (1 - x_0)s + x_0 & \text{für } 0 < x_0 < 1, \\ x_0 & \text{für } x_0 \geq 1, \end{cases} \quad \wedge \quad t = k_2(s) \overset{(8)}{=} s \\
\Leftrightarrow x &= \begin{cases} t + x_0 & \text{für } x_0 \leq 0, \\ t + (1 - t)x_0 & \text{für } 0 < x_0 < 1, \\ x_0 & \text{für } x_0 \geq 1, \end{cases} \quad \wedge \quad t = s \\
\overset{t \neq 1}{\Leftrightarrow} x_0 &= \begin{cases} x - t & \text{für } x_0 \leq 0, \\ \frac{x-t}{1-t} & \text{für } 0 < x_0 < 1, \\ x & \text{für } x_0 \geq 1, \end{cases} \quad \wedge \quad t = s \\
\overset{1-t>0}{\Leftrightarrow} x_0 &= \begin{cases} x - t & \text{für } t \geq x, \\ \frac{x-t}{1-t} & \text{für } t < x < 1, \\ x & \text{für } x \geq 1, \end{cases} \quad \wedge \quad t = s.
\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$T : D = \{(s, x_0) : 0 < s < 1\} \to R = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 1\right\}, \qquad (s, x_0) \mapsto k(s) = k(s, x_0)$$

ist also bijektiv und es gilt

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= (u \circ T \circ T^{-1})(x, t) = w(s, x_0) \overset{(7)}{=} u(x_0, 0) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 \leq 0, \\ 1 - x_0 & \text{für } 0 < x_0 < 1, \\ 0 & \text{für } x_0 \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq x, \\ 1 - \frac{x-t}{1-t} & \text{für } t < x < 1, \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq x, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{für } t < x < 1, \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

für alle $(x, t) \in R$ (siehe Abb. 1).

Bemerkungen:

- Das berechnete u ist nicht differenzierbar entlang der Geraden $x = t$ und $x = 1$ und somit keine „klassische Lösung“. Dies liegt daran, dass die Anfangswerte $u(x_0, 0) =: f(x_0)$ nicht differenzierbar sind bei $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$. Würde man f dort „glätten“, so wäre auch u differenzierbar.

- Bei $(x, t) = (1, 1)$ schneiden sich verschiedene Grundcharakteristiken und u wird singulär (unstetig). Dies liegt nicht an der „Rauheit“ der Anfangswerte, sondern an der Struktur der Differentialgleichung
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \qquad \textit{(unviskose Burger-Gleichung).}$$
Sie entspricht, vage gesprochen, der linearen Transportgleichung
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0,$$
bei der die Transportgeschwindigkeit a von dem transportierten Wert $u(x_0, 0)$ abhängt: Hohe Werte werden schnell, kleine Werte werden langsam entlang der Grundcharakteristiken transportiert. Deshalb schneiden sich Grundcharakteristiken i.A. und es entstehen dort s.g. Schocks.

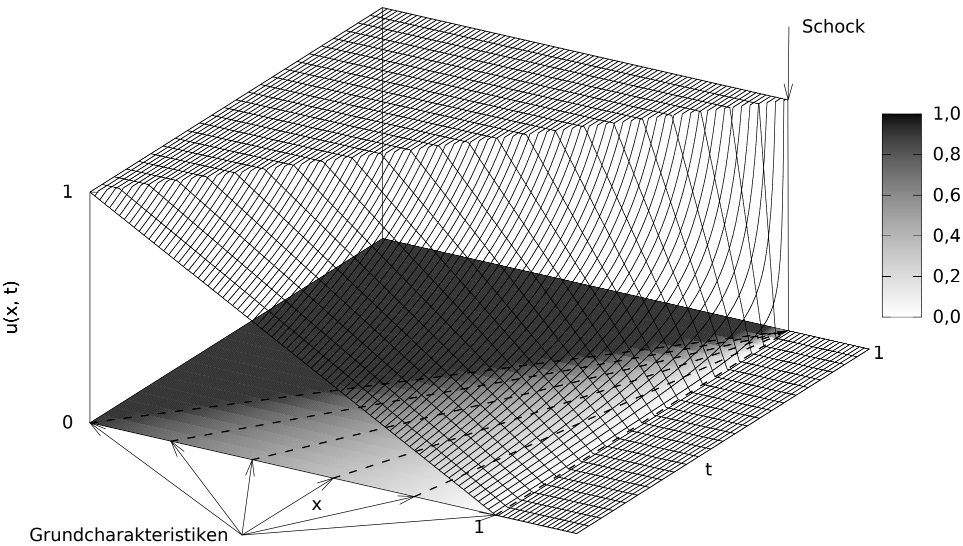

Abbildung 1: Lösung des Anfangswertproblems und Grundcharakteristiken.

Aufgabe 36 (Übung)

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(\vec{x}) = 1, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Wir suchen Lösungen u von der Form

$$u(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|) \qquad \left(\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}\right),$$

mit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{x}) &= g'(\|\vec{x}\|)\frac{2x_i}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} = g'(\|\vec{x}\|)\frac{x_i}{\|\vec{x}\|}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\vec{x}) &= g''(\|\vec{x}\|)\frac{x_i^2}{\|\vec{x}\|^2} + g'(\|\vec{x}\|)\left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_i^2}{\|\vec{x}\|^3}\right) \\
\Rightarrow \Delta u(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\vec{x}) = g''(\|\vec{x}\|) + g'(\|\vec{x}\|)\frac{n-1}{\|\vec{x}\|} \qquad \left(\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}\right).
\end{aligned}$$

Folglich löst u von der obigen Form genau dann die gegebene Poisson-Gleichung, wenn g der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$g''(r) + g'(r)\frac{n-1}{r} = -1 \qquad (r > 0)$$

genügt. Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten für $h = g'$

$$h'(r) = -h(r)\frac{n-1}{r} - 1 \qquad (r > 0).$$

Ihre homogene Lösung h_h ist durch

$$h_h(r) = e^{\int \frac{1-n}{r}\,\mathrm{d}r} = r^{1-n} \qquad (r > 0)$$

gegeben. Eine partikuläre Lösung h_p liefert die Variation-der-Konstanten-Formel zu

$$h_p(r) = -h_h(r)\int \frac{1}{h_h(r)}\,\mathrm{d}r = -r^{1-n}\int r^{n-1}\,\mathrm{d}r = -r^{1-n}\frac{r^n}{n} = -\frac{r}{n} \qquad (r > 0).$$

Damit ist die allgemeine Lösung h durch

$$h(r) = C_1 r^{1-n} - \frac{r}{n} \qquad (r > 0)$$

mit einer freien Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$ gegeben. Damit folgt für g:

$$g(r) = \int h(r)\,\mathrm{d}r = \begin{cases} -\frac{r^2}{4} + C_1\log(r) + C_2 & \text{für } n = 2, \\ -\frac{r^2}{2n} + \frac{C_1}{2-n}r^{2-n} + C_2 & \text{für } n > 2 \end{cases} \qquad (r > 0).$$

Aufgabe 37 (Tutorium)

(a) Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= xe^y, && (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= x+1, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x},t) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{x},t) &= t^2(x-y+z), && \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(\vec{x},0) &= e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}}, && \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Wir ersetzen formal y gegen t. Dann lautet das gegebene Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \underbrace{(-1)}_{=:a} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= -xe^t =: g(x,t), && (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= x+1 =: f(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Seine Lösung ist nach Abschnitt 28.1/2 der Vorlesung durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-ta) + \int_0^t g(x-(t-\tau)a,\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= (x+t)+1 - \int_0^t (x+(t-\tau))e^\tau\,\mathrm{d}\tau \\ &= x+t+1-(x+t)\,[e^\tau]_{\tau=0}^t + \int_0^t \underbrace{\tau}_{u}\ \underbrace{e^\tau}_{v'}\,\mathrm{d}\tau \\ &\overset{\text{Part. Int.}}{=} 2(x+t)+1-(x+t)e^t + [\tau e^\tau]_{\tau=0}^t - \int_0^t e^\tau\,\mathrm{d}\tau \\ &= 2(x+t)+1-(x+t)e^t + te^t - e^t + 1 \\ &= 2(x+t+1)-(x+1)e^t \end{aligned}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

(b) Es liegt das lineare Transportproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{=:\vec{a}} \cdot \nabla u(\vec{x},t) &= t^2 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \cdot \vec{x} =: g(\vec{x},t), && \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(\vec{x},0) &= e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} =: f(\vec{x}), && \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

vor. Seine Lösung ist nach Abschnitt 28.1/2 der Vorlesung durch

$$\begin{aligned}
u(\vec{x}, t) &= f(\vec{x} - t\vec{a}) + \int_0^t g(\vec{x} - (t-\tau)\vec{a}, \tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= e^{-\frac{(x-t)^2+(y-2t)^2+(z-t)^2}{2}} + \int_0^t \tau^2 \vec{b} \cdot (\vec{x} - (t-\tau)\vec{a})\,\mathrm{d}\tau \\
&= e^{-\frac{(x-t)^2+(y-2t)^2+(z-t)^2}{2}} + \int_0^t \tau^2 \vec{b} \cdot \vec{x}\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \tau^2 (t-\tau) \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{a})}_{=0}\,\mathrm{d}\tau \\
&= e^{-\frac{(x-t)^2+(y-2t)^2+(z-t)^2}{2}} + \frac{1}{3} t^3 (x - y + z)
\end{aligned}$$

für alle $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Aufgabe 38 (Tutorium)

(a) Betrachten Sie die eindimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x(x^2 u(x,t)) = 0, \qquad x,t > 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x), \qquad x > 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem Charakteristikenverfahren.

(b) Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$t\partial_t u(x,t) + \frac{t}{xu(x,t)}\partial_x u(x,t) + u(x,t) = 0, \qquad x,t > 0,$$
$$u(\xi,\xi^2) = 1, \qquad \xi > 0.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial x^2 u}{\partial x}(x,t) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + x^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -2xu(x,t) \\
\Leftrightarrow \quad \underbrace{u'(x,t)}_{=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:a(x,t,u(x,t))} &= \underbrace{-2xu(x,t)}_{=:b(x,t,u(x,t))} \qquad (x,t > 0).
\end{aligned}$$

Die vorliegende Differentialgleichung ist also eine quasilineare Gleichung erster Ordnung. Nach Abschnitt 28.3 der Vorlesung lautet das charakteristische System für $k : I \to \mathbb{R}^2$ und $w = u \circ k$ also

$$\begin{aligned}
k_1'(s) &= a_1(k(s), w(s)) = k_1(s)^2, && (10)\\
k_2'(s) &= a_2(k(s), w(s)) = 1, && (11)\\
w'(s) &= b(k(s), w(s)) = -2k_1(s)w(s) \qquad (s \in I). && (12)
\end{aligned}$$

Da die Anfangswerte für u bei $(x_0, 0)$ gegeben sind ($x_0 > 0$), lauten die Anfangsbedingungen für die Charakteristiken (vgl. Abschnitt 28.4 der Vorlesung)

$$\begin{aligned}
k_1(0) &= x_0, && (13)\\
k_2(0) &= 0, && (14)\\
w(0) &= u(k(0)) = u(x_0, 0) = \sin(x_0). && (15)
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Lösung des charakteristischen Systems:

- k_1: Die Differentialgleichung (10) ist eine Differentialgleichung in getrennten Veränderlichen.

Mit dem Anfangswert (13) ergibt sich ihre Lösung formal zu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} &= k_1^2 \\
\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}k_1}{k_1^2} &= \mathrm{d}s \\
\rightsquigarrow \int_{x_0}^{k_1(s)} \frac{1}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^s \mathrm{d}\tau \\
\Rightarrow -\left[\frac{1}{\xi}\right]_{\xi=x_0}^{k_1(s)} &= s \\
\Leftrightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{k_1(s)} &= s \\
\Leftrightarrow k_1(s) &= \frac{1}{\frac{1}{x_0} - s} = \frac{x_0}{1 - sx_0}.
\end{aligned}$$

Die Lösung „lebt" auf $I = \left[0, \frac{1}{x_0}\right)$ und auf dieser Menge ist $k_1^2(s) \neq 0$. Damit ist diese formal berechnete Lösung die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

- k_2: Die Differentialgleichung (11) liefert direkt $k_2(s) = s + C_2$ für $s \in I$. Wegen der Anfangsbedingung (14) ist $C_2 = 0$ und damit

  $$k_2(s) = s \qquad (s \in I).$$

- w: Die bereits berechnete Lösung für k_1 wird in (12) eingesetzt und man erhält eine homogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Es gilt

  $$-2\int_0^s \frac{x_0}{1 - \tau x_0}\,\mathrm{d}\tau = 2\log(1 - sx_0) \qquad (s \in I),$$

  womit

  $$w(s) = w(0)e^{\int_0^s \frac{-2x_0}{1-\tau x_0}\,\mathrm{d}\tau} = \sin(x_0)(1 - sx_0)^2 \qquad (s \in I)$$

  folgt.

Plot einiger Grundcharakteristiken k ist in Abb. 2 gegeben.

Zum gegebenen $x, t > 0$ versuchen wir nun die Gleichung

$$(x, t) = k(s) = k(s, x_0)$$

nach $(x_0, s) \in \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z_1,\, 0 \leq z_2 < \frac{1}{z_1}\right\}$ aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned}
k(s, x_0) &= (x, t) \\
\Leftrightarrow x &= \frac{x_0}{1 - sx_0} = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - s} \wedge t = s \\
\Leftrightarrow \frac{1}{x} &= \frac{1}{x_0} - t \wedge t = s \\
\Leftrightarrow x_0 &= \frac{1}{\frac{1}{x} + t} = \frac{x}{1 + tx} \wedge t = s.
\end{aligned}$$

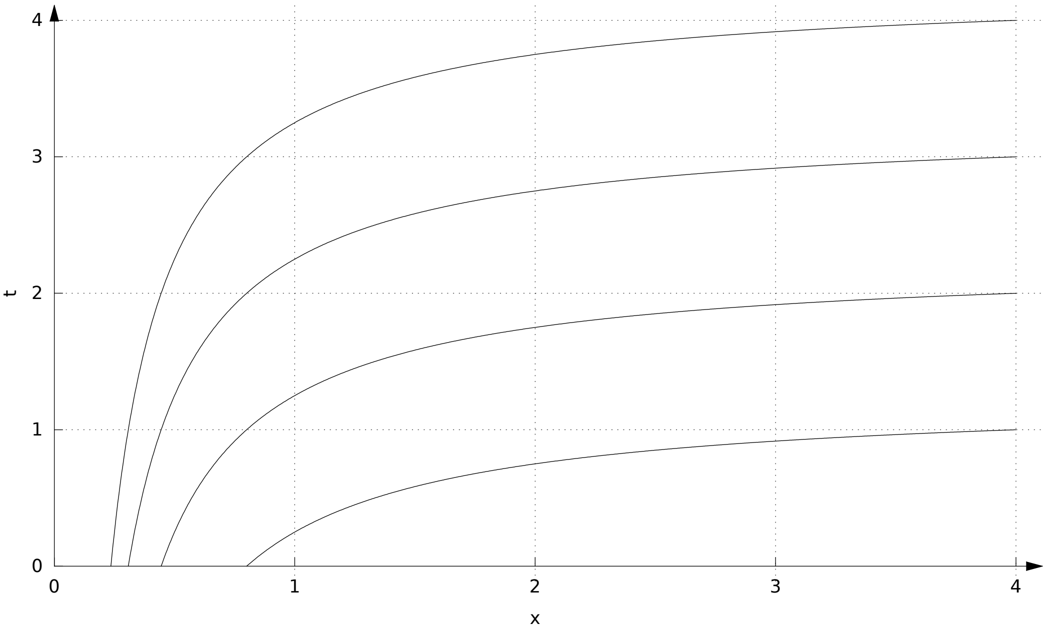

Abbildung 2: Einige Grundcharakteristiken.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : D = \left\{(s, x_0) \in \mathbb{R}^2 :\ x_0 > 0, 0 \le s < \frac{1}{x_0}\right\} &\to R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 :\ x, t > 0\right\}, \\ (s, x_0) &\mapsto k(s) = k(s, x_0) \end{aligned}$$

ist damit bijektiv und es gilt

$$u(x,t) = (u \circ T \circ T^{-1})(x,t) = w(s, x_0) = \sin(x_0)(1 - s x_0)^2 = \frac{\sin\left(\frac{x}{1+tx}\right)}{(1+tx)^2}$$

für alle $(x, t) \in R$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} t\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{t}{xu(x,t)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + u(x,t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{t}{xu(x,t)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + t\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -u(x,t) \\ \Leftrightarrow \underbrace{u'(x,t)}_{=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{t}{xu(x,t)} \\ t \end{pmatrix}}_{=:a(x,t,u(x,t))} &= \underbrace{-u(x,t)}_{=:b(x,t,u(x,t))} \qquad (x, t > 0). \end{aligned}$$

Die vorliegende Differentialgleichung ist also eine quasilineare Gleichung erster Ordnung. Nach Abschnitt 28.3 der Vorlesung lautet das charakteristische System für $k : I \to \mathbb{R}^2$ und $w = u \circ k$ also

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= a_1(k(s), w(s)) = \frac{k_2(s)}{k_1(s)w(s)}, & (16) \\ k_2'(s) &= a_2(k(s), w(s)) = k_2(s), & (17) \\ w'(s) &= b(k(s), w(s)) = -w(s) \qquad (s \in I). & (18) \end{aligned}$$

Da die Anfangswerte für u bei (ξ, ξ^2) gegeben sind ($\xi > 0$), lauten die Anfangsbedingungen für die Charakteristiken (vgl. Abschnitt 28.4 der Vorlesung)

$$\begin{aligned} k_1(0) &= \xi, && (19)\\ k_2(0) &= \xi^2, && (20)\\ w(0) &= u(k(0)) = u(\xi, \xi^2) = 1. && (21) \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Lösung des charakteristischen Systems:

- k_2: Die Differentialgleichung (17) liefert direkt $k_2(s) = C_2 e^s$ für $s \in I$. Wegen der Anfangsbedingung (20) ist $C_2 = \xi^2$ und damit

$$k_2(s) = \xi^2 e^s \qquad (s \in I).$$

- w: Die Differentialgleichung (18) liefert direkt $w(s) = C_3 e^{-s}$ für $s \in I$. Wegen der Anfangsbedingung (21) ist $C_3 = 1$ und damit

$$w(s) = e^{-s} \qquad (s \in I).$$

- k_1: Die bereits berechnete Lösung für k_2 und w wird in (16) eingesetzt und man erhält eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Mit dem Anfangswert (19) ergibt sich ihre Lösung formal zu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} &= \frac{\xi^2 e^s}{k_1 e^{-s}}\\ \rightsquigarrow k_1 \mathrm{d}k_1 &= \xi^2 e^{2s}\\ \rightsquigarrow \int_\xi^{k_1(s)} \eta \, \mathrm{d}\eta &= \int_0^s \xi^2 e^{2\tau}\, \tau\\ \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\eta^2\right]_{\eta=\xi}^{k_1(s)} &= \left[\frac{\xi^2}{2} e^{2\tau}\right]_{\tau=0}^{s}\\ \Leftrightarrow (k_1(s))^2 - \xi^2 &= \xi^2 e^{2s} - \xi^2\\ \overset{k_1(s)>0}{\Leftrightarrow} k_1(s) &= \xi e^s. \end{aligned}$$

  Die Lösung „lebt" auf $I = \mathbb{R}$ und auf dieser Menge ist $0 < k_1(s) < \infty$. Damit ist diese formal berechnete Lösung die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

Plot einiger Grundcharakteristiken k, sowie der Kurve Γ, auf der die Anfangswerte für u vorgegeben sind, ist in Abb. 3 gegeben.

Zum gegebenen $x, t > 0$ versuchen wir nun die Gleichung

$$(x, t) = k(s) = k(s, \xi)$$

nach $(\xi, s) \in \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z_1\right\}$ aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned} k(s, \xi) &= (x, t)\\ \Leftrightarrow x &= \xi e^s \wedge t = \xi^2 e^s\\ \Leftrightarrow x &= \xi e^s \wedge t = \xi x\\ \Leftrightarrow \xi &= \frac{t}{x} \wedge s = \log\left(\frac{x^2}{t}\right). \end{aligned}$$

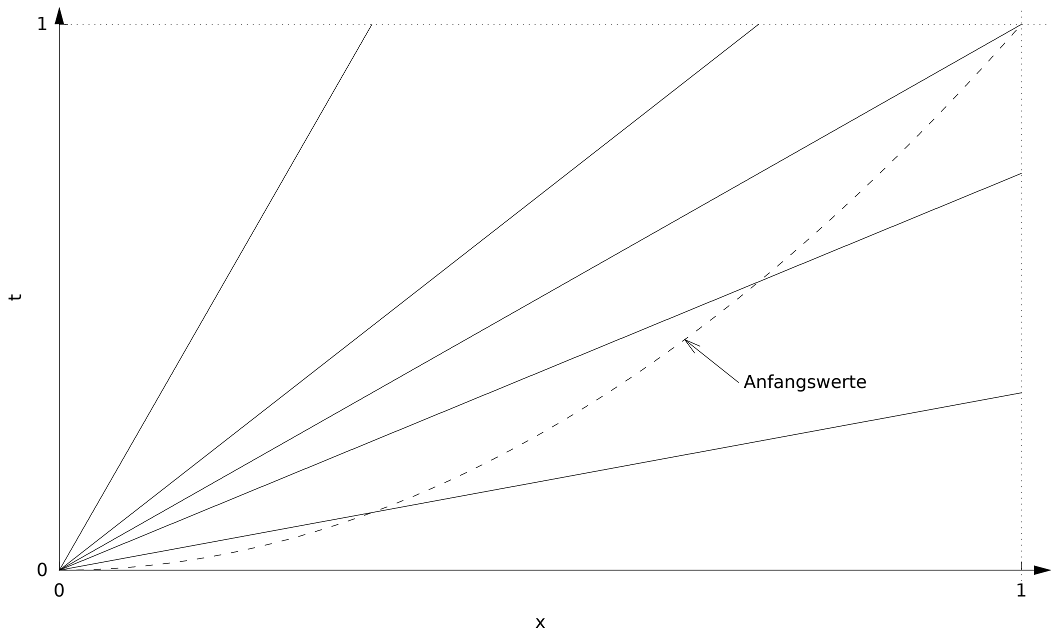

Abbildung 3: Einige Grundcharakteristiken und Kurve der Anfangswerte.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : D = \left\{(s,\xi) \in \mathbb{R}^2 : \xi > 0\right\} &\to R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x, t > 0\right\}, \\ (s,\xi) &\mapsto k(s) = k(s,\xi) \end{aligned}$$

ist damit bijektiv und es gilt

$$u(x,t) = (u \circ T \circ T^{-1})(x,t) = w(s,\xi) = e^{-s} = \frac{t}{x^2}$$

für alle $(x,t) \in R$.

Aufgabe 39 (Tutorium)

(a) Seien $0 < d < R < d', q' \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$\Gamma(\vec{x} - d\vec{e}_z) + q'\Gamma(\vec{x} - d'\vec{e}_z) = 0$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{x}\| = R$, wobei Γ die Grundlösung der Laplace-Gleichung bezeichnet. Bestimmen Sie d' und q'.

(b) Sei $R > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{R^2 - \|\vec{x}\|^2}{4\pi R} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}, \qquad x \in B(\vec{0}, R),\ \vec{y} \in \partial B(\vec{0}, R)$$

gilt. Dabei bezeichne G die Greensche Funktion für die Kugel $B(\vec{0}, R) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Lösungsvorschlag:

(a) Nach Abschnitt 29.4 der Vorlesung ist

$$\Gamma(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \qquad \left(\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}\right).$$

Aus der gegebenen Gleichheit erhalten wir damit durch Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{x} - d\vec{e}_z) + q'\Gamma(\vec{x} - d'\vec{e}_z) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x} - d\vec{e}_z\|} - \frac{q'}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x} - d'\vec{e}_z\|} &= 0 \\ \overset{q' \neq 0}{\Leftrightarrow} q' \|\vec{x} - d\vec{e}_z\| &= \|\vec{x} - d'\vec{e}_z\| \end{aligned}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{x}\| = R$. Einsetzen von $\vec{x} \in \left\{R\vec{e}_z, -R\vec{e}_z\right\}$ liefert

$$\begin{aligned} q'(R - d) &= d' - R, \\ q'(R + d) &= R + d'. \end{aligned}$$

Summen- und Differenzbildung der beiden obigen Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} q'R &= d', \\ q'd &= R. \end{aligned}$$

Letzte Gleichung kann nach q' umgestellt werden: $q' = \frac{R}{d}$. Einsetzen in die vorletzte Gleichung ergibt $d' = \frac{R^2}{d}$.

(b) Nach Abschnitt 29.6 der Vorlesung ist G gegeben durch

$$G(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} - \frac{1}{\left\| \frac{\|\vec{y}\|}{R} \vec{x} - \frac{R}{\|\vec{y}\|} \vec{y} \right\|} \right) & \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{y} \neq \vec{0}, \\ -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{1}{R} \right) & \text{für } \vec{y} = \vec{0}, \vec{x} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Der Normaleneinheitsvektor $\vec{N}$ auf der Sphäre $\partial B(\vec{0}, R)$ im Punkt $\vec{y} \in \partial B(\vec{0}, R)$ ist durch $\vec{N} = \frac{\vec{y}}{R}$ gegeben. Es gilt ferner

$$(\nabla \|\cdot\|)(\vec{z}) = \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|} \qquad \left(\vec{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}\right). \tag{22}$$

Wir zeigen die Identität aus der Aufgabenstellung zunächst für $\vec{x} = \vec{0}$. Es gilt in der Tat

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_{\vec{y}}}(\vec{0},\vec{y}) = (\nabla_{\vec{y}} G)(\vec{0},\vec{y}) \cdot \frac{\vec{y}}{R} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla_{\vec{y}}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\|\vec{y}\|}\right)\right] \cdot \frac{\vec{y}}{R} \stackrel{(22)}{=} \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|^3} \cdot \frac{\vec{y}}{R} = \frac{1}{4\pi R^2}$$

für alle $\vec{y} \in \partial B(\vec{0}, R)$.

Für $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{0} \neq \vec{y} \neq \vec{x}$ gilt (vgl. Abschnitt 29.6 der Vorlesung)

$$\left\|\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x} - \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}\right\|^2 = \frac{\|\vec{y}\|^2\,\|\vec{x}\|^2}{R^2} - 2\left\langle \vec{x}|\vec{y}\right\rangle + R^2 = \left\|\frac{\|\vec{x}\|}{R}\vec{y} - \frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}\right\|^2. \tag{23}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_{\vec{y}}}(\vec{x},\vec{y}) &= (\nabla_{\vec{y}} G)(\vec{x},\vec{y}) \cdot \frac{\vec{y}}{R} = -\frac{1}{4\pi}\left[\nabla_{\vec{y}}\left(\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{y}\|} - \frac{1}{\left\|\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x} - \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}\right\|}\right)\right] \cdot \frac{\vec{y}}{R} \\
&\stackrel{(23)}{=} -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} - \nabla_{\vec{y}}\left(\frac{1}{\left\|\frac{\|\vec{x}\|}{R}\vec{y} - \frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}\right\|}\right)\right] \cdot \frac{\vec{y}}{R} \\
&= -\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{\left\langle \vec{x}|\vec{y}\right\rangle - \|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} + \vec{y} \cdot \left(\frac{\frac{\|\vec{x}\|}{R}\vec{y} - \frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}}{\left\|\frac{\|\vec{x}\|}{R}\vec{y} - \frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}\right\|^3}\right)\frac{\|\vec{x}\|}{R}\right] \\
&\stackrel{(23)}{=} -\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{\left\langle \vec{x}|\vec{y}\right\rangle - R^2}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} + \frac{R\,\|\vec{x}\| - \frac{R}{\|\vec{x}\|}\left\langle \vec{x}|\vec{y}\right\rangle}{\left\|\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x} - \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}\right\|^3}\frac{\|\vec{x}\|}{R}\right] \\
&\stackrel{\|\vec{y}\|=R}{=} -\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{\left\langle \vec{x}|\vec{y}\right\rangle - R^2}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} + \frac{\|\vec{x}^2\| - \left\langle \vec{x}|\vec{y}\right\rangle}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}\right] = \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - \|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}
\end{aligned}$$

für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$ und alle $\vec{y} \in \partial B(\vec{0}, R)$. ■