Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Dr. Tobias Ried

WS 2017/18
2. Februar 2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 40

Betrachten Sie das Rand- und Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0 \qquad (0 < x < 1,\ t > 0), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \qquad (t > 0) \\ u(x,0) &= \cos(\pi x) + 1 \qquad (0 \le x \le 1). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen von der Form $u(x,t) = w(x)v(t)$ der Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie das obige Rand- und Anfangswertproblem.

Aufgabe 41

Bestimmen Sie die beschränkte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \qquad (x^2 + y^2 > 1), \\ u(x,y) &= x \qquad (x^2 + y^2 = 1), \end{aligned}$$

indem Sie es in Polarkoordinaten betrachten und den Separationsansatz verwenden.
Hinweis: In Polarkoordinaten gilt

$$\Delta v(\rho,\varphi) = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}(\rho,\varphi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho,\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(\rho,\varphi).$$

Aufgabe 42

Sei $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\ 0 < y < b\right\}$. Betrachten Sie das folgende Rand- und Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t) &= 0 \qquad (\vec{x} \in \Omega,\ t > 0), \\ u(\vec{x},t) &= 0 \qquad (\vec{x} \in \partial\Omega,\ t \ge 0), \\ u(\vec{x},0) &= 0 \qquad (\vec{x} \in \Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) &= \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}}\, \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \qquad (\vec{x} \in \Omega). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen von der Form $u(x,y,t) = w_1(x)w_2(y)v(t)$ der Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie das obige Rand- und Anfangswertproblem.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 43

Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 \qquad (1 < x^2 + y^2 < 4),\\
u(x,y) &= 1 + 3x + 8xy \qquad (x^2 + y^2 = 1),\\
\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(x,y) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}xy \qquad (x^2 + y^2 = 4),
\end{aligned}$$

indem Sie es in Polarkoordinaten betrachten und den Separationsansatz verwenden.
HINWEIS: Aufgabe 42.

Aufgabe 44

Die Eigenschwingungen einer kreisförmig eingespannten Membran sind Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned}
-\Delta v(x,y) = \lambda v(x,y), \quad (x,y) \in K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},\\
v = 0 \quad \text{auf} \quad \partial K,
\end{aligned} \tag{1}$$

mit $\lambda > 0$.

(a) Es sei v eine Lösung des Eigenwertproblems (1) und $V(r,\varphi) := v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Welcher (partiellen) Differentialgleichung genügt V?

Wir wollen nun mithilfe eines Separationsansatzes $V(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)$ Lösungen des Eigenwertproblems (1) finden.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für g. Achten Sie dabei auf die korrekten Randbedingungen.

(c) Zeigen Sie, dass f einer Bessel-Differentialgleichung genügen muss und bestimmen Sie alle beschränkten Lösungen der Differentialgleichung für f durch einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz.
HINWEIS: Abschnitt 25.14 in der Vorlesungszusammenfassung.

(d) Zeigen Sie, dass die zulässigen Werte für λ durch Nullstellen geeigneter Bessel-Funktionen gegeben sind.

(e) Geben Sie alle beschränkten Lösungen des Eigenwertproblems (1) der Form $f(r)g(\varphi)$ an.

Erinnerung: Die Modulprüfung (Klausur) findet am Montag, den **05. März 2018** von **14:00 bis 16:00** Uhr statt. Bitte denken Sie daran, sich rechtzeitig im Campus Management für Studierende Portal dafür anzumelden. Anmeldeschluss ist Samstag, der **10. Februar 2018**. Weitere Informationen finden Sie auf der Homepage der Veranstaltung.