Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Dr. Tobias Ried

WS 2017/18
5. Februar 2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 40

Betrachten Sie das Rand- und Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0 \qquad (0 < x < 1,\ t > 0),\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \qquad (t > 0)\\
u(x,0) &= \cos(\pi x) + 1 \qquad (0 \le x \le 1).
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen von der Form $u(x,t) = w(x)v(t)$ der Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie das obige Rand- und Anfangswertproblem.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Klar: $u(x,t) = 0$ für $0 < x < 1$ und $t > 0$ definiert eine Lösung der Differentialgleichung. Im Folgenden suchen wir also Lösungen $u \not\equiv 0$, also etwa $u(x_0,t_0) \neq 0$ für ein $0 < x_0 < 1$ und ein $t_0 > 0$. Geht man mit dem Separationsansatz $u(x,t) = w(x)v(t)$ in die Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2}(x,t) &= 0\\
\Leftrightarrow w(x)v'(t) - w''(x)v(t) &= 0\\
\Leftrightarrow w(x)v'(t) &= w''(x)v(t)
\end{aligned}$$

Nach obiger Voraussetzung ist $w(x) \neq 0$ für $x = x_0$. Deshalb gilt

$$v'(t) = \underbrace{\frac{w''(x_0)}{w(x_0)}}_{=:\lambda} v(t) \qquad (t > 0)$$

und folglich

$$v(t) = Ce^{\lambda t} \qquad (t > 0)$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Entsprechend erhält man für $t = t_0$

$$w(x)v'(t_0) = w''(x)v(t_0) \Leftrightarrow w(x)\lambda v(t_0) = w''(x)v(t_0) \Leftrightarrow w''(x) = \lambda w(x).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist durch

$$w(x) = \begin{cases} C_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda} x\right) + C_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda} x\right), & \text{falls } \lambda > 0, \\ C_1 x + C_2, & \text{falls } \lambda = 0, \\ C_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda} x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda} x\right), & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases} \qquad (0 \le x \le 1)$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ gegeben.

(b) Da die Wärmeleitungsgleichung linear ist, machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad = \quad & C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(1)} \underbrace{e^{t\lambda_k^2} \cosh(\lambda_k x)}_{=:u_k^{(1)}(x,t)} + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(2)} \underbrace{e^{t\lambda_k^2} \sinh(\lambda_k x)}_{=:u_k^{(2)}(x,t)} + \\ & \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)} \underbrace{e^{-t\mu_k^2} \cos(\mu_k x)}_{=:u_k^{(3)}(x,t)} + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(4)} \underbrace{e^{-t\mu_k^2} \sin(\mu_k x)}_{=:u_k^{(4)}(x,t)} \qquad (0 \le x \le 1,\ t > 0) \end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $N \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_N$, $0 < \mu_1 < \ldots < \mu_N$, C_0, C_1, $C_1^{(1)}, \ldots, C_N^{(1)}, C_1^{(2)}, \ldots, C_N^{(2)}, C_1^{(3)}, \ldots, C_N^{(3)}, C_1^{(4)}, \ldots, C_N^{(4)} \in \mathbb{R}$.
Wir versuchen die Neumann-Randbedingungen bereits „gliedweise" zu erfüllen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} 1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} x &= 1, \\ \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x}(x,t) &= e^{t\lambda_k^2} \lambda_k \sinh(\lambda_k x), \\ \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x}(x,t) &= e^{t\lambda_k^2} \lambda_k \cosh(\lambda_k x), \\ \frac{\partial u_k^{(3)}}{\partial x}(x,t) &= -e^{-t\mu_k^2} \mu_k \sin(\mu_k x), \\ \frac{\partial u_k^{(4)}}{\partial x}(x,t) &= e^{-t\mu_k^2} \mu_k \cos(\mu_k x) \qquad (0 \le x \le 1,\ t \ge 0). \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert, dass die Koeffizienten von $u_k^{(2)}$, $u_k^{(4)}$ verschwinden. Einsetzen von $x = 1$ liefert, dass die Koeffizienten von x und $u_k^{(1)}$ verschwinden und $\mu_k \in \pi\mathbb{N}$.

Diese Überlegungen schränken den Ansatz auf

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)} e^{-t\pi^2 k^2} \cos(k\pi x) \qquad (0 \le x \le 1,\ t \ge 0)$$

ein. Einsetzen von $t = 0$ und Vergleich mit dem Anfangswert liefert $N = 1$, $C_0 = 1$, $C_1^{(3)} = 1$, also

$$u(x,t) = 1 + \mathrm{e}^{-\pi^2 t} \cos(\pi x), \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0.$$

Aufgabe 41

Bestimmen Sie die beschränkte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \qquad (x^2+y^2>1),\\ u(x,y) &= x \qquad (x^2+y^2=1), \end{aligned}$$

indem Sie es in Polarkoordinaten betrachten und den Separationsansatz verwenden.
Hinweis: In Polarkoordinaten gilt

$$\Delta v(\rho,\varphi) = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}(\rho,\varphi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho,\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(\rho,\varphi).$$

Lösungsvorschlag: Sei $T : (0,\infty)\times(0,2\pi) \to D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0 \vee x>0\}$ mit

$$T(r,\varphi) = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

für alle $r>0$ und alle $\varphi\in(0,2\pi)$. Dann ist $T\in C^\infty$ und invertierbar und $T^{(-1)}\in C^\infty$. (Polarkoordinaten, vgl. Abschnitt 21.4 von HM2). Setze $v = u\circ T$. Wir machen den Separationsansatz $v(\rho,\varphi) = v_1(\rho)v_2(\varphi)$. Da wir an nichttrivialen Lösungen interessiert sind, gelte etwa $v_1(\rho_0)\neq 0$ für ein $\rho>1$ und $v_2(\varphi_0)\neq 0$ für ein $\varphi\in(0,2\pi)$. Laut Hinweis gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{(\partial\rho)^2}(\rho,\varphi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}(\rho,\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{(\partial\varphi)^2}(\rho,\varphi)\\ &= v_1''(\rho)v_2(\varphi) + \frac{v_2(\varphi)}{\rho}v_1'(\rho) + \frac{v_1(\rho)}{\rho^2}v_2''(\varphi) \overset{!}{=} 0 \qquad (\rho>1,\ \varphi\in(0,2\pi))\\ \Rightarrow v_2''(\varphi) &= \underbrace{-\left(\frac{\rho_0^2 v_1''(\rho_0)}{v_1(\rho_0)} + \frac{\rho_0 v_1'(\rho_0)}{v_1(\rho_0)}\right)}_{=:\lambda} v_2(\varphi) \qquad (\varphi\in(0,2\pi)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$v_2(\varphi) = \begin{cases} C_1\cos\left(\sqrt{-\lambda}\varphi\right) + C_2\sin\left(\sqrt{-\lambda}\varphi\right), & \text{falls } \lambda<0,\\ C_1\varphi + C_2, & \text{falls } \lambda = 0,\\ C_1\cosh\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right) + C_2\sinh\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right), & \text{falls } \lambda>0 \end{cases} \qquad (\varphi\in(0,2\pi))$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2\in\mathbb{R}$. Damit $v\circ T^{(-1)}$ sich zur nichttrivialen differenzierbaren Funktion u auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lässt, muss

$$\lim_{\varphi\to 0+} v_2(\varphi) = \lim_{\varphi\to 2\pi-} v_2(\varphi) \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi\to 0+} v_2'(\varphi) = \lim_{\varphi\to 2\pi-} v_2'(\varphi)$$

gelten. Dies ist nur für

$$\lambda = -k^2 \quad \text{mit} \quad k\in\mathbb{N}_0$$

möglich und im Fall $\lambda = 0$ muss $v_2(\varphi) = C_2$ gelten.
Ferner ergibt sich

$$\rho^2 v_1''(\rho) + \rho v_1'(\rho) + \lambda v_1(\rho) = 0 \qquad (\rho>1).$$

Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung für v_1. Wir substituieren deshalb $\rho = e^s$, $w(s) = v_1(e^s)$ für $s \in \mathbb{R}$. Es folgt $w'(s) = e^s v_1'(e^s) = \rho v_1'(\rho)$ und $w''(s) = e^s v_1'(e^s) + e^{2s} v_1''(e^s) = \rho v_1'(e^s) + \rho^2 v_1''(e^s)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$w''(s) + \lambda w(s) = 0 \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Für $\lambda = 0$ ist also

$$w(s) = C_1 s + C_2 \qquad (s \in \mathbb{R}),$$

und für $\lambda = -k^2 < 0$ ist

$$w(s) = C_1 e^{ks} + C_2 e^{-ks} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Resubstituieren liefert

$$v_1(\rho) = \begin{cases} C_1 \log(\rho) + C_2, & \text{falls } k = 0, \\ C_1 \rho^{-k} + C_2 \rho^k, & \text{falls } k \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (\rho > 1).$$

Da die Laplace-Gleichung linear ist, machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} v(\rho, \varphi) \quad = \quad & C_0 + C_1 \log(\rho) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(1)} \rho^k \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(2)} \rho^k \sin(k\varphi) + \\ & \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)} \rho^{-k} \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(4)} \rho^{-k} \sin(k\varphi) \end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $N \in \mathbb{N}$, C_0, C_1, $C_1^{(1)}, \ldots, C_N^{(1)}$, $C_1^{(2)}, \ldots, C_N^{(2)}$, $C_1^{(3)}, \ldots, C_N^{(3)}$, $C_1^{(4)}, \ldots, C_N^{(4)} \in \mathbb{R}$.
Da die Terme $\log(\rho)$, $\rho^k \cos(k\varphi)$ und $\rho^k \sin(k\varphi)$ unbeschränkt sind, können sie nicht vorkommen. Die Randbedingung $u(x, y) = x$ für $x^2 + y^2 = 1$ lautet in Polarkoordinaten $v(1, \varphi) = \cos(\varphi)$ für $\varphi \in (0, \varphi)$. Einsetzen von $\rho = 1$ in den Ansatz und Vergleich mit der Randbedingung liefert $N = 1$, $C_0 = 0$, $C_1^{(4)} = 0$, $C_1^{(3)} = 1$, also

$$v(\rho, \varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{\rho} \qquad (\rho \geq 1,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

bzw.

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \geq 1).$$

Aufgabe 42

Sei $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\, 0 < y < b\right\}$. Betrachten Sie das folgende Rand- und Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x}, t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x}, t) &= 0 \qquad (\vec{x} \in \Omega,\ t > 0),\\
u(\vec{x}, t) &= 0 \qquad (\vec{x} \in \partial\Omega,\ t \geq 0),\\
u(\vec{x}, 0) &= 0 \qquad (\vec{x} \in \Omega),\\
\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) &= \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b} y\right) \qquad (\vec{x} \in \Omega).
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen von der Form $u(x, y, t) = w_1(x) w_2(y) v(t)$ der Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie das obige Rand- und Anfangswertproblem.

Lösungsvorschlag:

(a) Klar: $u(x, y, t) = 0$ für $(x, y) \in \Omega$ und $t > 0$ definiert eine Lösung der Differentialgleichung. Im Folgenden suchen wir also Lösungen $u \not\equiv 0$, also etwa $u(x_0, y_0, t_0) \neq 0$ für ein $0 < x_0 < a$, ein $0 < y_0 < b$ und ein $t_0 > 0$. Geht man mit dem Separationsansatz $u(x, y, t) = w_1(x) w_2(y) v(t)$ in die Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{(\partial t)^2}(\vec{x}, t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x}, t) &= 0\\
\Leftrightarrow w_1(x) w_2(y) v''(t) &= (w_1''(x) w_2(y) + w_1(x) w_2''(y)) v(t)
\end{aligned}$$

Nach obiger Voraussetzung ist $w_1(x) w_2(y) \neq 0$ für $x = x_0$ und $y = y_0$. Deshalb gilt

$$v''(t) = \underbrace{\left(\frac{w_1''(x_0)}{w_1(x_0)} + \frac{w_2''(y_0)}{w_2(y_0)}\right)}_{=:\lambda} v(t) \qquad (t > 0).$$

Mögen

$$f_\mu^{(1)}(x) = \begin{cases} \cosh\left(\sqrt{\mu} x\right), & \text{falls } \mu > 0,\\ 1 & \text{falls } \mu = 0, ,\\ \cos\left(\sqrt{-\mu} x\right), & \text{falls } \mu < 0 \end{cases} \qquad f_\mu^{(2)}(x) = \begin{cases} \sinh\left(\sqrt{\mu} x\right), & \text{falls } \mu > 0,\\ x & \text{falls } \mu = 0,\\ \sin\left(\sqrt{-\mu} x\right), & \text{falls } \mu < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

die linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung $f''(x) = \mu f(x)$ bezeichnen. Offenbar ist

$$v(t) = C_1 f_\lambda^{(1)}(t) + C_2 f_\lambda^{(2)}(t) \qquad (t > 0)$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Entsprechend erhält man für $y = y_0$, $t = t_0$

$$v_1''(x) = \underbrace{\left(\lambda - \frac{v_2''(y_0)}{v_2(y_0)}\right)}_{=:\lambda_1} v_1(x) \qquad (0 < x < a),$$

bzw. für $x = x_0$, $t = t_0$

$$v_2''(x) = \underbrace{\left(\lambda - \frac{v_1''(y_0)}{v_1(y_0)}\right)}_{=:\lambda_2} v_2(x) \qquad (0 < x < b).$$

Folglich haben alle Lösungen von der gesuchten Form die Gestalt

$$u(x,y,t) = (C_1 f^{(1)}_{\lambda_1+\lambda_2}(t) + C_2 f^{(2)}_{\lambda_1+\lambda_2}(t))(C_3 f^{(1)}_{\lambda_1}(x) + C_4 f^{(2)}_{\lambda_1}(x))(C_5 f^{(1)}_{\lambda_2}(y) + C_6 f^{(2)}_{\lambda_2}(y))$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Wir suchen zunächst nach nichttrivialen Lösungen der Wellengleichung, die die Form

$$u(x,y,t) = f^{(i)}_{\lambda_1+\lambda_2}(t) f^{(j)}_{\lambda_1}(x) f^{(k)}_{\lambda_2}(y) \qquad ((x,y) \in \Omega,\ t > 0)$$

haben ($i, j, k \in \{1,2\}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$) und der Randbedingung

$$u(\vec{x}, t) = 0 \qquad (\vec{x} \in \partial\Omega,\ t \geq 0)$$

genügen (vgl. Aufgabe 41 (ii)). Wegen der Produktstruktur von u, muss bereits

$$f^{(j)}_{\lambda_1}(0) = 0 = f^{(j)}_{\lambda_1}(a), \qquad f^{(k)}_{\lambda_2}(0) = 0 = f^{(k)}_{\lambda_2}(b)$$

gelten. Die erste Gleichheit liefert $j = 2$. Da $\sinh(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ gilt, liefert die zweite Gleichheit $\lambda_1 < 0$ und

$$\sqrt{-\lambda_1} a \in \pi\mathbb{N} \quad \left(\Leftrightarrow \sin\left(\sqrt{-\lambda_1} a\right) = 0\right).$$

Genauso folgt $k = 2$ und $\lambda_2 = -k^2 \frac{\pi^2}{a^2}$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Als Nächstes versuchen wir das Rand- und Anfangswertproblem durch eine Linearkombination der oben berechneten „erlaubten" Funktionen zu lösen:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{k,l=1}^{N} \left(C^{(1)}_{k,l} \cos\left(\pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}} t\right) + C^{(2)}_{k,l} \sin\left(\pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}} t\right)\right) \\ &\qquad \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right) \\ \Rightarrow u(x,y,0) &= \sum_{k,l=1}^{N} C^{(1)}_{k,l} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right) \end{aligned}$$

Dabei sind die Konstanten $N \in \mathbb{N}_0$ und $C^{(i)}_{j,k}$ mit $i \in \{1,2\}$, $k, l \in \{1, \ldots, N\}$ zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) &= \sum_{k,l=1}^{N} \pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}} \left(-C^{(1)}_{k,l} \sin\left(\pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}} t\right) + C^{(2)}_{k,l} \cos\left(\pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}} t\right)\right) \\ &\qquad \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) &= \sum_{k,l=1}^{N} \pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}} C^{(2)}_{k,l} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right). \end{aligned}$$

Vergleich mit den Anfangsbedingungen liefert $N = 2$, $C^{(1)}_{k,l} = 0$ für alle $k, l \in \{1, 2\}$, $C^{(2)}_{1,1} = C^{(2)}_{2,1} = C^{(2)}_{2,2} = 0$ und $C_{1,2} = \frac{1}{\pi}$. Damit ist

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$

die Lösung des vorgelegten Anfangs- und Randwertproblems.

Aufgabe 43

Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 \qquad (1 < x^2+y^2 < 4),\\
u(x,y) &= 1+3x+8xy \qquad (x^2+y^2=1),\\
\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(x,y) &= \frac{1}{2}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}xy \qquad (x^2+y^2=4),
\end{aligned}$$

indem Sie es in Polarkoordinaten betrachten und den Separationsansatz verwenden.
HINWEIS: Aufgabe 42.

LÖSUNGSVORSCHLAG: Wir gehen wie in Aufgabe 42 vor und erhalten den Ansatz in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
v(\rho,\varphi) &= C_0 + C_1\log(\rho) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(1)}\rho^k\cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(2)}\rho^k\sin(k\varphi) + \\
&\quad \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)}\rho^{-k}\cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(4)}\rho^{-k}\sin(k\varphi) \qquad (1<\rho<2,\ 0\le\varphi<2\pi)
\end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $N \in \mathbb{N}$, C_0, C_1, $C_1^{(1)},\ldots,C_N^{(1)}$, $C_1^{(2)},\ldots,C_N^{(2)}$, $C_1^{(3)},\ldots,C_N^{(3)}$, $C_1^{(4)},\ldots,C_N^{(4)} \in \mathbb{R}$.
Damit folgt

$$\begin{aligned}
v(1,\varphi) &= C_0 + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(1)}\cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(2)}\sin(k\varphi) + \\
&\quad \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)}\cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(4)}\sin(k\varphi),\\
\frac{\partial v}{\partial\rho}(\rho,\varphi) &= \frac{C_1}{\rho} + \sum_{k=1}^{N} kC_k^{(1)}\rho^{k-1}\cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} kC_k^{(2)}\rho^{k-1}\sin(k\varphi) - \\
&\quad \sum_{k=1}^{N} kC_k^{(3)}\rho^{-(k+1)}\cos(k\varphi) - \sum_{k=1}^{N} kC_k^{(4)}\rho^{-(k+1)}\sin(k\varphi),\\
\frac{\partial v}{\partial\rho}(2,\varphi) &= \frac{C_1}{2} + \sum_{k=1}^{N} kC_k^{(1)}2^{k-1}\cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} kC_k^{(2)}2^{k-1}\sin(k\varphi) - \\
&\quad \sum_{k=1}^{N} kC_k^{(3)}2^{-(k+1)}\cos(k\varphi) - \sum_{k=1}^{N} kC_k^{(4)}2^{-(k+1)}\sin(k\varphi) \qquad (1\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi<2\pi)
\end{aligned}$$

Die Neumann-Randbedingung ist bei $\rho = 2$ gegeben. Dort ist der äußere Normaleneinheitsvektor $\vec{N} = \frac{\vec{x}}{2}$ für alle $\|\vec{x}\| = 2$ und es gilt $\frac{\partial v}{\partial \vec{N}} = \frac{\partial v}{\partial \rho}$. Wir übersetzen damit die Randbedingungen in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
v(1,\varphi) &= 1 + 3\cos(\varphi) + 8\cos(\varphi)\sin(\varphi)\\
&= 1 + 3\cos(\varphi) + 4\sin(2\varphi),\\
\frac{\partial v}{\partial\rho}(2,\varphi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(\varphi) - \frac{1}{2}\sin(2\varphi).
\end{aligned}$$

Vergleich der auftretenden Terme mit dem Ansatz liefert $N = 2$, $C_2^{(1)} = C_2^{(3)} = C_1^{(2)} = C_1^{(4)} = 0$, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, sowie

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} + C_1^{(3)} &= 3, \\ C_1^{(1)} - \frac{1}{4}C_1^{(3)} &= \frac{3}{2}, \\ C_2^{(2)} + C_2^{(4)} &= 4, \\ 4C_2^{(2)} - \frac{1}{4}C_2^{(4)} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen ergeben $C_1^{(1)} = \frac{9}{5}$ und $C_1^{(3)} = \frac{6}{5}$. Die letzten beiden ergeben $C_2^{(4)} = \frac{66}{17}$ und $C_2^{(2)} = \frac{2}{17}$. Es ergibt sich also insgesamt,

$$v(\rho,\varphi) = 1+\log(\rho)+\frac{9}{5}\rho\cos(\varphi)+\frac{2}{17}\rho^2\sin(2\varphi)+\frac{6}{5}\frac{1}{\rho}\cos(\varphi)+\frac{66}{17}\frac{1}{\rho^2}\sin(2\varphi) \qquad (1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \varphi 2\pi),$$

bzw. in kartesischen Koordinaten

$$u(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \frac{9}{5}x + \frac{4}{17}xy + \frac{6}{5}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{132}{17}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad (1 \leq x^2+y^2 \leq 4).$$

Aufgabe 44

Die Eigenschwingungen einer kreisförmig eingespannten Membran sind Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta v(x,y) &= \lambda v(x,y), \quad (x,y) \in K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}, \\ v &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial K, \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\lambda > 0$.

(a) Es sei v eine Lösung des Eigenwertproblems (1) und $V(r,\varphi) := v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Welcher (partiellen) Differentialgleichung genügt V?

Wir wollen nun mithilfe eines Separationsansatzes $V(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)$ Lösungen des Eigenwertproblems (1) finden.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für g. Achten Sie dabei auf die korrekten Randbedingungen.

(c) Zeigen Sie, dass f einer Bessel-Differentialgleichung genügen muss und bestimmen Sie alle beschränkten Lösungen der Differentialgleichung für f durch einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz.
HINWEIS: Abschnitt 25.14 in der Vorlesungszusammenfassung.

(d) Zeigen Sie, dass die zulässigen Werte für λ durch Nullstellen geeigneter Bessel-Funktionen gegeben sind.

(e) Geben Sie alle beschränkten Lösungen des Eigenwertproblems (1) der Form $f(r)g(\varphi)$ an.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Sei $V(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_r V(r,\varphi) &= \cos\varphi\, \partial_x v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\, \partial_y v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ \partial_r^2 V(r,\varphi) &= \cos^2\varphi\, \partial_x^2 v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + 2\cos\varphi\sin\varphi\, \partial_x\partial_y v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + \sin^2\varphi\, \partial_y^2 v(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_\varphi V(r,\varphi) &= -r\sin\varphi\, \partial_x v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\, \partial_y v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ \partial_\varphi^2 V(r,\varphi) &= r^2\sin^2\varphi\, \partial_x^2 v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 2r^2\sin\varphi\cos\varphi \partial_x\partial_y v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r^2\cos^2\varphi\, \partial_y^2 v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad - r\cos\varphi\, \partial_x v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - r\sin\varphi\, \partial_y v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Insbesondere ist also

$$\partial_x^2 v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \partial_y^2 v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \partial_r^2 V(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r V(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 V(r,\varphi).$$

Ist v eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $-\Delta v = \lambda v$, so genügt V der partiellen Differentialgleichung

$$-\partial_r^2 V(r,\varphi) - \frac{1}{r}\partial_r V(r,\varphi) - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 V(r,\varphi) = \lambda V(r,\varphi), \quad r > 0,\ \varphi \in (0,2\pi), \tag{2}$$

mit Randbedingungen $V(1,\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$ und $V(r,\cdot)$ periodisch für alle $r > 0$. Letzteres impliziert, dass

$$\lim_{\varphi\to 0} V(r,\varphi) = \lim_{\varphi\to 2\pi} V(r,\varphi), \qquad \lim_{\varphi\to 0} \partial_\varphi V(r,\varphi) = \lim_{\varphi\to 2\pi} \partial_\varphi V(r,\varphi)$$

für alle $r > 0$.

(b) Der Separationsansatz $V(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)$ führt eingesetzt in die Differentialgleichung (2) auf

$$-f''(r)g(\varphi) - \frac{1}{r}f'(r)g(\varphi) - \frac{1}{r^2}f(r)g''(\varphi) = \lambda f(r)g(\varphi)$$

beziehungsweise

$$f''(r)g(\varphi) + \frac{1}{r}f'(r)g(\varphi) + \lambda f(r)g(\varphi) = -\frac{1}{r^2}f(r)g''(\varphi).$$

Für diejenigen $r > 0$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ mit $f(r) \neq 0$ und $g(\varphi) \neq 0$ folgt

$$r^2\frac{f''(r) + \frac{f'(r)}{r} + \lambda f(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)}.$$

Da die linke Seite unabhängig von φ und die rechte Seite unabhängig von r ist, müssen beide gleich einer Konstanten μ sein. Wir erhalten die beiden Differentialgleichungen

$$r^2 f''(r) + rf'(r) + (\lambda r^2 - \mu)f(r) = 0, \quad r > 0, \tag{3}$$
$$g''(\varphi) + \mu g(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \tag{4}$$

Aufgrund der Randbedingungen muss g periodisch sein, weshalb $\mu = \nu^2 \in \mathbb{N}_0$ gelten muss. Genauer gilt

$$g(\varphi) = c_1\cos(\nu\varphi) + c_2\sin(\nu\varphi)$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Die Differentialgleichung für f ist eine Besselsche Differentialgleichung. Wir bringen Sie noch in "Normalform". Sei dazu $r = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}$ und $h(\xi) := f(\xi/\sqrt{\lambda})$. Dann gilt

$$h'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}f'(\xi/\sqrt{\lambda}), \qquad h''(\xi) = \frac{1}{\lambda}f''(\xi/\sqrt{\lambda}),$$

und h genügt der Differentialgleichung

$$\xi^2 h''(\xi) + \xi h'(\xi) + (\xi^2 - \nu^2)h(\xi) = 0, \quad \xi > 0,$$

d.h. einer Besselschen Differentialgleichung der Ordnung $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Der abgewandelte Potenzreihenansatz $h(\xi) = \xi^\rho \sum_{k=0}^\infty a_k\xi^k$ führt eingesetzt in die Differentialgleichung

$$(\rho^2 - \nu^2)a_0\xi^\rho + \left((\rho+1)^2 - \nu^2\right)a_1\xi^{\rho+1} + \sum_{k=2}^\infty \left[\left((k+\rho)^2 - \nu^2\right)a_k + a_{k-2}\right]\xi^{\rho+k} = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert die determinierende Gleichung $\rho^2 - \nu^2 = 0$ für ρ, mit den beiden ganzzahligen Nullstellen $\rho_{1/2} = \pm\nu \in \mathbb{Z}$. Insbesondere gilt $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}_0$. Damit sind laut Vorlesung die beiden linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung die Funktionen

$$h_1(\xi) = \xi^\nu \sum_{k=0}^\infty a_k\xi^k$$
$$h_2(\xi) = A\,y_1(\xi)\,\log\xi + \xi^{-\nu}\sum_{k=0}^\infty b_k\xi^k$$

mit $A \in \{0,1\}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Damit sind alle beschränkten Lösungen von der Form $h(\xi) = c h_1(\xi)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Wir lösen noch die Rekursionsgleichung für die Koeffizienten a_k von h_1. Der $k = 1$ Term $\left((\rho+1)^2 - \nu^2\right) a_1 = 0$ impliziert wegen $\rho = \nu$, dass $a_1 = 0$ gelten muss. Für $k \geq 2$ haben wir

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+\nu)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)},$$

insbesondere $a_{2m+1} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Für gerade $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, finden wir

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^m m! 2^m (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)},$$

also

$$h_1(\xi) = a_0 \xi^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m}.$$

Es ist üblich, $a_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}$ zu wählen, dann wird $h_1(\xi) = J_\nu(\xi)$ mit

$$J_\nu(\xi) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(\nu+m)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+\nu},$$

die sogenannte Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Zusammenfassend sind alle beschränkten Lösungen f der Bessel-Differentialgleichung gegeben durch

$$f(r) = c J_\nu(r\sqrt{\lambda}), \quad c \in \mathbb{R}.$$

(d) Die Randbedingung $f(1) = 0$ impliziert, dass

$$f(1) = c J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

d.h. die zulässigen Werte von λ sind gerade diejenigen, für die $\sqrt{\lambda}$ eine Nullstelle der Bessel-Funktion J_ν ist.

(e) Sämtliche Lösungen $V(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)$ der partiellen Differentialgleichung (2) sind daher gegeben durch

$$V(r,\varphi) = J_\nu(\sqrt{\lambda_\nu} r)\left(c_1 \cos(\nu\varphi) + c_2 \sin(\nu\varphi)\right),$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda_\nu \in \{\lambda > 0 : J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0\}$.