18.10.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

1. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Vergessensmodell nach H. Ebbinghaus)

Ein Student hat für eine Prüfung gelernt und sich so den gesamten Stoff des Faches eingeprägt. Allerdings wird der Student nach einiger Zeit einen Teil davon vergessen haben. Wir bezeichnen hier mit $p(t)$ den Prozentsatz des noch vorhandenen Wissens zum Zeitpunkt t. Wir nehmen zusätzlich an, dass einen gewissen Prozentsatz $b \in (0, 100)$ der Student niemals vergessen wird. Zudem machen wir den Ansatz, dass die Vergessensrate $\dot{p}(t)$ zu Zeitpunkt t proportional zum noch zu vergessenen Stoff ist.
Formulieren Sie das zugehörige Anfangswertproblem und lösen Sie es.

Lösung von Aufgabe 1

Wegen $\dot{p}(t) \sim (p(t) - b)$ für alle $t > 0$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\text{(A1)}\ \dot{p}(t) = -\lambda\,(p(t) - b)$$

für alle $t > 0$ mit einer Konstante $\lambda > 0$. Hierbei handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Also ist das geforderte Anfangswertproblem (kurz: AwP):

$$\text{(AwP)}\ \begin{cases} \dot{p}(t) = -\lambda p(t) + \lambda b \text{ auf } (0, \infty), \\ p(0) = 100. \end{cases}$$

Um dieses Anfangswertproblem zu lösen gehen wir in mehreren Schritten vor. Ersteinmal lösen wir die Differentialgleichung (A1):
Schritt 1. Lösen der homogenen Gleichung:

$$\dot{p}_h(t) = -\lambda p_h(t) \text{ auf } (0, \infty).$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$p_h(t) = C\mathrm{e}^{\int -\lambda \mathrm{d}\tau} = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung:
Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir hierfür den Ansatz

$$p_p(t) = C(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

und setzen diesen in die Differentialgleichung (A1) ein. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\lambda C(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} + \lambda b = -\lambda p_p(t) + \lambda b = \dot{p}_p(t) &= C'(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda C(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} \\ \Leftrightarrow\ \lambda b &= C'(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} \\ \Leftrightarrow\ \lambda b\mathrm{e}^{\lambda t} &= C'(t), \end{aligned}$$

d.h.

$$C(t) = \int \lambda b\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau = b\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

So folgt nun für die partikuläre Lösung:

$$p_p(t) = C(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} = b\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{-\lambda t} = b$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung:
Laut der Variation der Konstant haben die Lösungen der Differentialgleichung (A1) die Form

$$p(t) = p_p(t) + p_h(t) = b + C\mathrm{e}^{-\lambda t} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Schritt 4. Aufstellen der speziellen Lösung:
Damit muss für die Lösung des Anfangswertproblems (AwP) gelten:

$$100 = p(0) = b + C\mathrm{e}{-}\lambda \cdot 0 = b + C\mathrm{e}^0 = b + C \;\Leftrightarrow\; C = 100 - b.$$

Also lautet die Lösung für das Anfangswertproblem (AwP)

$$p(t) = b + (100 - b)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

□

Bemerkung: Wir konnten hier die Gleichung sogar auf der ganzen reellen Achse $\mathbb{R}$ lösen statt nur auf $(0, \infty)$, das macht hier zwar modellierungstechnisch nicht so viel Sinn, ist aber für andere Versuche sinnvoll, wenn wir in der Zeit zurückgehen wollen. Das sowas nicht immer geht, sehen wir zum Beispiel in Aufgabe 2(2).

Aufgabe 2 (Einige Beispiele für verschiedene DGL-Typen)

Charakterisieren und Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen/ Anfangswertprobleme.

(1) $y' = -y + \frac{1}{t}$ auf $(0, \infty)$.

(2) $y' + \left(x - \frac{1}{x}\right) y + \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{y} = 0,\; y(1) = 1.$

(3) $y' = x^3y^2 + \frac{y}{x} - x^5.$

(4) $(1 + x)y' = x^2y,\; y(0) = 1.$

Lösung von Aufgabe 2

(1) Es handelt sich hier um eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Wir gehen in mehreren Schritten vor.
Schritt 1. Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' = -y_h \text{ auf } (0, \infty).$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$y_h(x) = C\mathrm{e}^{\int -1 \mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung:
Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir hierfür den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

und setzen diesen in die Differentialgleichung (1) ein. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} -C(x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{x} = -y_p(x) + \frac{1}{x} &= y_p'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow\; \frac{1}{x} &= C'(x)\mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow\; C'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{x}. \end{aligned}$$

Mithilfe der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}$$

folgt für $C(x)$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{\mathrm{e}^z}{z} \mathrm{d}z = \int \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathrm{d}z = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \mathrm{d}z \\ &= \int \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right) \mathrm{d}z = \int \frac{1}{z} \mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int z^{n-1} \mathrm{d}z \\ &= \log(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

für alle $x \in (0,\infty)$. Also ist die partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = \left(\log(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}\right) \mathrm{e}^{-x} \text{ für } x \in (0,\infty).$$

Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung:
Die Allgemeine Lösung zur Differentialgleichung (1) lautet nahc der Variation der Konstanten:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \left(\log(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}\right) \mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} = \left(\log(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} + C\right) \mathrm{e}^{-x}$$

für $x \in (0,\infty)$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. □

(2) Es handelt sich hierbei um eine homogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer einer Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = -1$.

Schritt 0. Umformen und Subsituieren in eine "elementar-lösbare" Gleichung:
Bevor wir mit unserem bekannten Schema der Variation der Konstanten arbeiten können, müssen wir diese Art der Gleichung noch passend umformen und substituieren. Wir multiplizieren die Differentialgleichung (2) mit $y^{-n} = y^1 = y$, so erhalten wir

$$(2) \;\Leftrightarrow\; yy' = \left(\frac{1}{x} - x\right) y^2 - x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Nun substituieren wir $v = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2$, d.h. nach Kettenregel (oder Produktregel):

$$v'(x) = 2y(x)y'(x).$$

Im Endeffekt erhalten wir damit das neue Anfangswertproblem (2')

$$(2) \;\Leftrightarrow\; (2') \begin{cases} v' = 2yy' = 2\left(\frac{1}{x} - x\right) y^2 - 2x\mathrm{e}^{-x^2} = 2\left(\frac{1}{x} - x\right) v - 2x\mathrm{e}^{-x^2}, \\ v(1) = y(1)^2 = 1^2 = 1. \end{cases}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Schritt 1. Lösen der homogenen Gleichung zu (2'):

$$v_h' = 2\left(\frac{1}{x} - x\right) v_h.$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} v_h(x) &= C\mathrm{e}^{\int 2\left(\frac{1}{z} - z\right)\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{2\log(x) - x^2} = C\mathrm{e}^{\log\left(x^2\right)}\mathrm{e}{-x}^2 \\ &= Cx^2\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 2. Herleiten der partikuläre Lösung zu (2'): Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung zu (2') machen wir hier den Ansatz

$$v_p(x) = C(x)x^2\mathrm{e}^{-x^2}$$

und setzen diesen in die Differentialgleichung (2') ein. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2C(x)\left(\frac{1}{x} - x\right) x^2\mathrm{e}^{-x^2} - 2x\mathrm{e}^{-x^2} = 2\left(\frac{1}{x} - x\right) v_p(x) - 2x\mathrm{e}^{-x^2} &= v_p'(x) = C'(x)x^2\mathrm{e}^{-x^2} + 2C(x)x\mathrm{e}^{-x^2} - 2C(x)x^3\mathrm{e}^{-x^2} \\ \Leftrightarrow\; -2x\mathrm{e}^{-x^2} &= C'(x)x^2\mathrm{e}^{-x^2} \\ \Leftrightarrow\; C'(x) &= -\frac{2}{x}, \end{aligned}$$

d.h. für $C(x)$:

$$C(x) = \int -\frac{2}{z}\mathrm{d}z = -2\log(|x|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Also ist die partikuläre Lösung zu (2') gegeben durch

$$v_p(x) = -2\log(|x|)x^2\mathrm{e}^{-x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (2'): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2') lautet nach der Variation der Konstanten

$$v(x) = v_p(x) + v_h(x) = -2\log(|x|)x^2\mathrm{e}^{-x^2} + Cx^2\mathrm{e}^{-x^2} = (-2\log(|x|) + C)\, x^2\mathrm{e}^{-x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Schritt 4. Aufstellen der speziellen Lösung zu (2'):
Für die Lösung des Anfangswertproblems (2') muss gelten:

$$1 = v(1) = (-2\log(1) + C) \cdot 1^2 \cdot \mathrm{e}^{-1^2} = \frac{C}{\mathrm{e}},$$

d.h. dass $C = \mathrm{e}$ sein muss. Damit ergibt sich für die Lösung des Anfangswertproblems (2'), da $1 \in (0, \infty)$ liegt:

$$v(x) = (-2\log(x) + \mathrm{e})\, x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \text{ für } x \in (0, \infty).$$

Schritt 5. Rücksubstitution zur Gleichung (2):
Es gilt:

$$y(x) = \pm\sqrt{v(x)} = \pm\sqrt{(-2\log(x) + \mathrm{e})\, x^2 \mathrm{e}^{-x^2}} = \pm\sqrt{\mathrm{e} - 2\log(x)}|x|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

y ist somit wohl-definiert für alle $x \in (0, \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}]$ und wegen $y(1) = 1 > 0$, sowie $1 \in (0, \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}]$ haben wir als Lösung des Anfangswertproblems (2):

$$y(x) = +x\sqrt{\mathrm{e} - 2\log(x)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ für } x \in (0, \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}].$$

□

(3) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer um eine inhomogene Riccatti-Differentialgleichung. Um diese lösen zu können, müssen wir sie erstmal in eine homogene Riccatti- / Bernoulli-Differentialgleichung umformen.

Schritt -1. Umformen in homogene Riccatti-Differentialgleichung:
Durch "Scharfes Hinsehen" sehen wir, dass $\widetilde{y}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, die Differentialgleichung (3) löst, denn

$$\widetilde{y}'(x) = 1 = x^3 \cdot x^2 + \frac{x}{x} - x^5 = x^3 \widetilde{y}(x)^2 + \frac{\widetilde{y}(x)}{x} - x^5$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Sei nun y eine Lösung der Differentialgleichung (3), setze dann $u := y - \widetilde{y}$. Dann erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (3) für $y = u + \widetilde{y}$:

$$\begin{aligned}
u'(x) + 1 = (u + \widetilde{y})'(x) = y'(x) &= x^3 y(x)^2 + \frac{y(x)}{x} - x^5 = x^3 \left(u(x) + \widetilde{y}(x)\right)^2 + \frac{u(x) + \widetilde{y}(x)}{x} - x^5 \\
&= x^3 \left(u(x) + x\right)^2 + \frac{u(x) + x}{x} - x^5 = x^3 u(x)^2 + 2x^4 u(x) + x^5 + \frac{u(x)}{x} + \frac{x}{x} - x^5 \\
&= x^3 u(x)^2 + \left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) u(x) + 1 \\
\Leftrightarrow\ u'(x) &= x^3 u(x)^2 + \left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) u(x). \qquad (\widetilde{2})
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $(\widetilde{2})$ ist eine homogene Riccatti-Differentialgleichung bzw. homogene Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = 2$, die wir lösen können.

Schritt 0. Umformen und Subsituieren in eine "elementar-lösbare" Gleichung
Wir formen nun die Differentialgleichung $(\widetilde{2})$ in eine inhomogene lineare Differentialgleichung um. Dazu multiplizieren wir $(\widetilde{2})$ mit u^{-2} und erhalten so:

$$\begin{aligned}
u'(x) &= x^3 u(x)^2 + \left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) u(x) \\
\Leftrightarrow\ \frac{u'(x)}{u(x)^2} &= x^3 + \left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) u(x)^{-1}.
\end{aligned}$$

Nun setzen wir $v := u^{1-n} = u^{1-2} = u^{-1}$, d.h. $v' = -\frac{u'}{u^2}$ und so erhalten wir

$$v'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -\left(x^3 + \left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) v(x)\right) = -\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) v(x) - x^3. \qquad (2')$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung.

Schritt 1. Lösen der homogenen Gleichung zu (3'):

$$v_h'(x) = -\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) v_h(x).$$

Die Lösung dazu lautet:

$$v_h(x) = C\mathrm{e}^{\int -\left(2z^4 + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5 - \log(x)} = C\mathrm{e}^{-\log(x)}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} = \frac{C}{x}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Aufstellen der partikulären Lösung zu (3'): Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung von (3') lautet die partikuläre Lösung zu (3'):

$$v_p(x) = \frac{C(x)}{x} \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5}.$$

Diese setzen wir in die Differentialgleichung (3') ein:

$$\begin{aligned}
-\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) \frac{C(x)}{x} \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - x^3 = -\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) v_p(x) - x^3 = v_p'(x) &= \frac{C'(x)}{x} \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - \frac{C(x)}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - 2C(x)x^3 \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} \\
\Leftrightarrow \ -x^3 &= \frac{C'(x)}{x} \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} \\
\Leftrightarrow \ C'(x) &= -x^4 \mathrm{e}^{\frac{2}{5}x^5}.
\end{aligned}$$

Also ergibt sich für $C(x)$:

$$C(x) = \int -z^4 \mathrm{e}^{\frac{2}{5}z^5} \mathrm{d}z = -\frac{1}{2} \mathrm{e}^{\frac{2}{5}x^5}.$$

Demnach ist die partikuläre Lösung zu (3'):

$$v_p(x) = \frac{C(x)}{x} \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} = -\frac{1}{2x} \mathrm{e}^{\frac{2}{5}x^5} \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} = -\frac{1}{2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung: Die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung (3') ist

$$v(x) = v_p(x) + v_h(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{C}{x} \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} = \frac{1}{2x}\left(2C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - 1\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution und Lösung von (3): Sei $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$ die Nullstelle (falls vorhanden) von der Abbildung

$$x \mapsto 2C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - 1.$$

(Die Nullstelle hier existiert genau dann, wenn $C > 0$, da die Exponentialfunktion stets positiv ist und deren Wertebereich das Intervall $(0, \infty)$ ist.) Die Rücksubstitution zu u lautet dann:

$$u(x) = \frac{2x}{2C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - 1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{\widetilde{x}\}$. Damit ist die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung (3) genau

$$\begin{aligned}
y(x) = u(x) + x &= x + \frac{2x}{2C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - 1} = \left(1 + \frac{2}{2C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - 1}\right) x \\
&= \frac{1 + 2C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5}}{2C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x^5} - 1} x
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{\widetilde{x}\}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. $\square$
(4) Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.
Schritt 1. Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h'(x) = \frac{x^2}{1+x} y_h(x).$$

Um dies (besser) Lösen zu können schreiben wir den Term $\frac{x^2}{1+x}$ um. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{1+x} &= \frac{x(1+x) - x}{1+x} = x - \frac{x}{1+x} \\
&= x - \frac{1 + x - 1}{1+x} = x + \frac{1}{1+x} - 1.
\end{aligned}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung zu (4) lautet nach unserer Vorüberlegung:

$$\begin{aligned}
y_h(x) &= C\mathrm{e}^{\int \frac{z^2}{1+z} \mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{\int \left(z + \frac{1}{1+z} - 1\right) \mathrm{d}z} \\
&= C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 + \log(1+x) - x} = C\mathrm{e}^{\log(1+x)} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 - x} = C(1+x)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der speziellen Lösung zu (4): Es muss wegen der Afangsbedingung $y(0) = 1$ gelten:

$$1 = y(0) = C(1+0)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\cdot 0-1\right)0} = C\mathrm{e}^0 = C,$$

d.h. die spezielle Lösung zum Anfangswertproblem (4) lautet:

$$y(x) = (1+x)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}x-1\right)x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 3 (Zu exakten DGL)

Prüfen Sie zuerst, ob die Differentialgleichung exakt ist und geben Sie im Falle der Exaktheit die Lösung in expliziter (falls möglich) bzw. in impliziter Form an.

(1) $(\cos(y) + 2xy)\,\mathrm{d}x + \left(x^2 - y - x\sin(y)\right)\mathrm{d}y = 0,\ y(0) = \sqrt{2}$.

(2) $2xy + x^2 - \frac{\tan(y)}{x^2} + \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{x\cos^2(y)}\right)y' = 0,\ y(1) = 1$.

(3) $2xy^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 2x^2y + \sqrt{x} = 0$ für $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Lösung von Aufgabe 3

(1) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = \cos(y) + 2xy,\ Q(x,y) = x^2 - y - x\sin(y) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und $(x_0, y_0) = \left(0, \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Die beiden Funktionen P und Q sind stetig-differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= -\sin(y) + 2x, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) &= 2x - \sin(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y). \end{aligned}$$

Weiter ist der Raum $\mathbb{R}^2$ offensichtlich einfach zusammenhängend, also ist laut Vorlesung die Differentialgleichung (1) exakt.
D.h. wir finden eine stetig-differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Schritt 2. Stammfunktion F finden: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von F (also P) bzgl der ersten Komponente:

$$F(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(z,y)\mathrm{d}z = \int P(z,y)\mathrm{d}z = \int (\cos(y) + 2zy)\,\mathrm{d}z = x\cos(y) + x^2y + C(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned} x^2 - y - x\sin(y) = Q(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(x,y) &= -x\sin(y) + x^2 + C'(y) \\ \Leftrightarrow\ C'(y) &= -y \\ \Leftrightarrow\ C(y) &= \int -z\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}y^2 + C \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. können wir $C = 0$ annehmen. Damit lautet die Stammfunktion F:

$$F(x,y) = x^2y + x\cos(y) - \frac{1}{2}y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Schritt 3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (1): Es gilt:

$$Q(x_0,y_0) = Q\left(0,\sqrt{2}\right) = 0^2 - \sqrt{2} - 0\cdot\sin\left(\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2} \neq 0.$$

Weiter ist:

$$F(x_0, y_0) = F\left(0, \sqrt{2}\right) = 0^2 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot \cos\left(\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2}^2 = -1.$$

Damit existiert ein (offenes) Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 = x_0 \in I$ so, dass die Gleichung

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) = F\left(0, \sqrt{2}\right) = -1$$

auf diesem Intervall eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = \sqrt{2}$ hat. Diese Lösung y ist damit auch die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1).

Schritt 4. Nach y auflösen??: Wir müssten dazu die Gleichung

$$x^2 y + x\cos(y) - \frac{1}{2}y^2 = F(x, y) = F\left(0, \sqrt{2}\right) = -1$$

nach y auflösen. Dies ist aber so einfach nicht möglich, d.h. wir können erstmal keine explizite Darstellung der Lösung y angeben, aber wir wissen, dass diese Lösung existiert und sogar eindeutig ist. $\square$

(2) Wir setzen erstmal

$$P(x, y) = 2xy + x^2 - \frac{\tan(y)}{x^2}, \ Q(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x\cos(y)^2}$$

für alle $(x, y) \in (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sowie $x_0 = 1 = y_0$.

Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Die beiden Funktionen P und Q sind stetig-differenzierbar auf ganz $(0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x, y) &= 2x - \frac{1}{x^2\cos(y)^2}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x, y) &= 2x - \frac{1}{x^2\cos(y)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x, y).
\end{aligned}$$

Weiter ist der Raum $(0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ offensichtlich einfach zusammenhängend, also ist laut Vorlesung die Differentialgleichung (2) exakt.

D.h. wir finden eine stetig-differenzierbare Funktion $F\colon (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x, y) \in (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Schritt 2. Stammfunktion F finden: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von F (also P) bzgl der ersten Komponente:

$$F(x, y) = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(z, y)\mathrm{d}z = \int P(z, y)\mathrm{d}z = \int \left(2zy + z^2 - \frac{\tan(y)}{z^2}\right) \mathrm{d}z = x^2 y + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\tan(y)}{x} + C(y)$$

für alle $(x, y) \in (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + \frac{1}{x\cos(y)^2} = Q(x, y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F(x, y) = x^2 + \frac{1}{x\cos(y)^2} + C'(y) \\
\Leftrightarrow\ C'(y) &= y^2 \\
\Leftrightarrow\ C(y) &= \int z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3}y^3 + C
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. können wir $C = 0$ annehmen. Damit lautet die Stammfunktion F:

$$F(x, y) = x^2 y + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{\tan(y)}{x}, \ (x, y) \in (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Schritt 3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (2): Es gilt:

$$Q(x_0, y_0) = Q(1, 1) = 1^2 + 1^2 + \frac{1}{1 \cdot \cos(1)^2} = 2 + \frac{1}{\cos(1)^2} > 0,$$

d.h. insbesondere ist

$$Q(x_0, y_0) = Q(1, 1) \neq 0.$$

Weiter ist:

$$F(x_0, y_0) = F(1, 1) = 1^2 \cdot 1 + \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{3}1^3 + \frac{\tan(1)}{1} = \frac{5}{3} + \tan(1).$$

Damit existiert ein (offenes) Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 = x_0 \in I_x$ so, dass die Gleichung

$$F(x,y) = F(x_0, y_0) = F(1,1) = \frac{5}{3} + \tan(1)$$

auf diesem Intervall eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = 1$ hat. Diese Lösung y ist damit auch die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2).
Schritt 4. Nach y auflösen??: Wir müssten dazu die Gleichung

$$x^2 y + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{\tan(y)}{x} = F(x,y) = F\left(0, \sqrt{2}\right) = \frac{5}{3} + \tan(1)$$

nach y auflösen. Dies ist aber so einfach nicht möglich, d.h. wir können erstmal keine explizite Darstellung der Lösung y angeben, aber wir wissen, dass diese Lösung existiert und sogar eindeutig ist. □
(3) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 2xy^2, \; Q(x,y) = 2x^2 y + \sqrt{x}$$

für alle $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Die beiden Funktionen P und Q sind stetig-differenzierbar auf ganz $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) = 4xy, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) = 4xy + \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y).
\end{aligned}$$

Weiter ist der Raum $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ offensichtlich einfach zusammenhängend, also ist laut Vorlesung die Differentialgleichung (3) nicht exakt.

Hinweise:

- Die erste Übung ist am Freitag, den 26.10.2018. Danach sind Übung und Tutorium im Wechsel, d.h. das erste Tutorium ist am Freitag, den 02.11.2018. Eine genauere Darstellung der Übungs- und Tutoriumstermine wird sich noch auf der Homepage finden.
- In der Übung werden hauptsächlich die Aufgaben vorgerechnet und Tipps, Hinweise, etc. gegeben.
- Im Tutorium sollen die Studierenden die Aufgaben unter Hilfestellung lösen, dabei orientieren sich die Tutoriumsaufgaben stets stark an den Aufgaben aus der Übung. Es werden eventuell so nur teilweise Lösungen besprochen, allerdings wird es Lösungsvorschläge zu allen Aufgaben (Übung und Tutorium) online auf der Homepage geben.
- Die schriftliche Klausur findet am Dienstag, den 26.02.2019 von 13.00 bis 15.00 Uhr statt.