

Höhere Mathematik III für Physik

2. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Zum Separationsansatz)

Lösen Sie erst die folgenden Differentialgleichungen allgemein mithilfe eines Separationsansatzes und anschließend das dazugehörige Anfangswertproblem.

$$(1) y' = e^y \sin(x), y(0) = 0.$$

$$(2) y' = \frac{e^y}{x^2 y}, x(0) = \frac{1}{3}.$$

$$(3) y' = \frac{2x \cos(y)}{(1+x^2) \sin(y)}, y(1) = \frac{\pi}{3}.$$

Lösung von Aufgabe 1

(1) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = \sin(x) \text{ und } g(y) = e^y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so können wir die Differentialgleichung (1) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.

Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{e^y} = e^{-y}.$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int e^{-y} dy = -e^{-y},$$

und

$$\int f(x) dx + C = \int \sin(x) dx + C = -\cos(x) + C$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Auflösen nach y : Es muss gelten:

$$\begin{aligned} -e^{-y(x)} &= \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C = -\cos(x) + C \\ \Leftrightarrow e^{-y(x)} &= \cos(x) - C \\ \Leftrightarrow -y(x) &= \log(\cos(x) - C) \\ \Leftrightarrow y(x) &= -\log(\cos(x) - C). \end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (1)

$$y(x) = -\log(\cos(x) - C)$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = -\log(\cos(0) - C) = -\log(1 - C) \\ \Leftrightarrow 1 &= e^0 = 1 - C \\ \Leftrightarrow C &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (1) lautet:

$$y(x) = -\log(\cos(x))$$

für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(2) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ und } g(y) = \frac{e^y}{y}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so können wir die Differentialgleichung (2) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.

Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{y}{e^y} = ye^{-y}.$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int ye^{-y} dy = -ye^{-y} + \int e^{-y} dy \\ &= -ye^{-y} - e^{-y} = -(y+1)e^{-y} \end{aligned}$$

laut partieller Integration und

$$\int f(x) dx + C = \int \frac{1}{x^2} dx + C = -\frac{1}{x} + C$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$.

Schritt 3. Auflösen nach x : Es muss gelten:

$$\begin{aligned} -(y+1)e^{-y} &= \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C = -\frac{1}{x(y)} + C \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x(y)} &= (y+1)e^{-y} + C \\ \Leftrightarrow x(y) &= \frac{1}{(y+1)e^{-y} + C}. \end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (2)

$$x(y) = \frac{1}{(y+1)e^{-y} + C}.$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = \frac{1}{3}$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= x(0) = \frac{1}{(0+1)e^{-0} + C} = \frac{1}{1+C} \\ \Leftrightarrow 1+C &= 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C = 2,$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (2) lautet:

$$x(y) = \frac{1}{(y+1)e^{-y} + 2}.$$

für alle $y \in (y_0, \infty)$, wobei $y_0 \in \mathbb{R}$ so gewählt ist (eindeutig!), dass

$$(y_0 + 1)e^{-y_0} + 2 = 0$$

ist. Aus dieser Gleichung sehen wir, dass y_0 sicherlich kleiner ist als -1 . □

(3) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ und } g(y) = \frac{\cos(y)}{\sin(y)}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, so können wir die Differentialgleichung (3) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.

Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y).$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = -\log(|\cos(y)|),$$

und

$$\int f(x) dx + C = \int \frac{2x}{1+x^2} dx + C = \log(|1+x^2|) + C = \log(1+x^2) + C$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Schritt 3. Auflösen nach y : Es muss gelten:

$$\begin{aligned} -\log(|\cos(y(x))|) &= \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C = \log(1+x^2) + C \\ \Leftrightarrow |\cos(y(x))| &= e^{-\log(1+x^2)-C} = \frac{e^{-C}}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \pm \cos(y(x)) &= \frac{e^{-C}}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \cos(y(x)) &= \pm \frac{e^{-C}}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow y(x) &= \cos^{-1}\left(\pm \frac{e^{-C}}{1+x^2}\right). \end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (3)

$$y(x) = \cos^{-1}\left(\pm \frac{e^{-C}}{1+x^2}\right)$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{\pi}{3}$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} = y(1) &= \cos^{-1}\left(\pm \frac{e^{-C}}{1+1^2}\right) = \cos^{-1}\left(\pm \frac{e^{-C}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{1}{2} e^{-C} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^C = 1$$

$$\Leftrightarrow C = \log(1) = 0,$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (3) lautet:

$$y(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung zum Merken bestimmter Sinus/ Cosinus-Werte: Dies geht anhand der folgenden Tabelle ganz gut:

Grad α	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
Bogenmaß x	$x = 0$	$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{3}$	$x = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos(x)$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$

Aufgabe 2 (Zum Eulerschen Multiplikator)

Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen nicht-exakt sind und finden Sie dann einen passenden Eulerschen Multiplikator η . Lösen Sie anschließend die Differentialgleichung bzw. das Anfangswertproblem. Beachten Sie dabei die jeweiligen Hinweise.

(1) $(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$.

Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η , der nur von x abhängt.

(2) $\cos(x)dx + (4ye^{-y} + \sin(x)) dy = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η , der nur von y abhängt.

(3) $(x + y) dx - \frac{x^2}{y} dy = 0$, $y(e) = 1$.

Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η , der nur von dem Produkt $x \cdot y$ abhängt.

Lösung von Aufgabe 2

Wir stellen zuerst eine Vorüberlegung an. Dazu seien P und Q zwei stetig-differenzierbare Funktionen (abhängig von zwei Variablen x und y). Gegeben sei nun die Differentialgleichung:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Für unsere Überlegung nehmen wir an, dass diese nicht-exakt ist.

Nun wollen wir einen Eulerschen Multiplikator η finden so, dass

$$\eta(x, y)P(x, y)dx + \eta(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

exakt ist, in dem wir uns eine gewisse Struktur φ vorgeben, genauer:

$$\eta = \eta(\varphi(x, y)).$$

Die Funktion φ kann dabei alles sein, nur x , y oder die Summe $x + y$, etc., der Multiplikator η hängt in dem Fall dann nur von x z.B. ab.

Wir setzen:

$$\tilde{P}(x, y) = \eta(x, y)P(x, y) \text{ und } \tilde{Q}(x, y) = \eta(x, y)Q(x, y).$$

Da nun die Differentialgleichung

$$\tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy = 0$$

exakt ist, muss gelten:

$$\frac{d}{dy} \tilde{P}(x, y) = \frac{d}{dx} \tilde{Q}(x, y).$$

Wir erhalten für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \tilde{P}(x, y) &= \frac{d}{dy} [\eta(\varphi(x, y)) P(x, y)] \\ &= \eta'(\varphi(x, y)) \frac{d}{dy} \varphi(x, y) \cdot P(x, y) + \eta(\varphi(x, y)) \frac{d}{dy} P(x, y), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tilde{Q}(x,y) &= \frac{d}{dx}[\eta(\varphi(x,y))Q(x,y)] \\ &= \eta'(\varphi(x,y))\frac{d}{dx}\varphi(x,y) \cdot Q(x,y) + \eta(\varphi(x,y))\frac{d}{dx}Q(x,y).\end{aligned}$$

Damit durch Umstellung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\tilde{P}(x,y) &= \frac{d}{dx}\tilde{Q}(x,y) \\ \Leftrightarrow \eta'(\varphi(x,y))\left[\frac{d}{dy}\varphi(x,y) \cdot P(x,y) - \frac{d}{dx}\varphi(x,y) \cdot Q(x,y)\right] &= \eta(\varphi(x,y))\left[\frac{d}{dx}Q(x,y) - \frac{d}{dy}P(x,y)\right] \\ \Leftrightarrow \eta'(\varphi(x,y)) &= \frac{\frac{d}{dx}Q(x,y) - \frac{d}{dy}P(x,y)}{\frac{d}{dy}\varphi(x,y) \cdot P(x,y) - \frac{d}{dx}\varphi(x,y) \cdot Q(x,y)}\eta(\varphi(x,y)).\end{aligned}$$

Wünschenswert wäre, dass es eine Funktion h gibt mit

$$h(\varphi(x,y)) = \frac{\frac{d}{dx}Q(x,y) - \frac{d}{dy}P(x,y)}{\frac{d}{dy}\varphi(x,y) \cdot P(x,y) - \frac{d}{dx}\varphi(x,y) \cdot Q(x,y)},$$

d.h. der Term

$$\frac{\frac{d}{dx}Q(x,y) - \frac{d}{dy}P(x,y)}{\frac{d}{dy}\varphi(x,y) \cdot P(x,y) - \frac{d}{dx}\varphi(x,y) \cdot Q(x,y)}$$

hängt nur von φ ab also z.B. nur von x oder $x+y$, denn dann haben wir

$$\eta'(\varphi(x,y)) = h(\varphi(x,y))\eta(\varphi(x,y)).$$

Zum Lösen nach η also ($z = \varphi(x,y)$)

$$\eta'(z) = h(z)\eta(z)$$

mit Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\eta(z) = Ce^{\int h(\tau)d\tau}.$$

O.B.d.A. wählen wir $C = 1$, da wir nur an einem $\eta \neq 0$ interessiert sind. Damit haben wir

$$\eta(\varphi(x,y)) = e^{\int \varphi(x,y) h(\tau)d\tau}.$$

(1) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 3xy + y^2 \text{ und } Q(x,y) = x^2 + xy$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}P(x,y) &= 3x + 2y, \\ \frac{d}{dx}Q(x,y) &= 2x + y\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}3x + 2y &= \frac{d}{dy}P(x,y) = \frac{d}{dx}Q(x,y) = 2x + y \\ \Leftrightarrow x &= -y\end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{d}{dy}P(x,y) \neq \frac{d}{dx}Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega \setminus M$, d.h. die Differentialgleichung (1) ist nicht exakt.

Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(x)$ finden, d.h. $\varphi(x,y) = x$.

Damit ist

$$\frac{d}{dx}\varphi(x,y) = 1 \text{ und } \frac{d}{dy}\varphi(x,y) = 0.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dx}Q(x, y) - \frac{d}{dy}P(x, y)}{\frac{d}{dy}\varphi(x, y) \cdot P(x, y) - \frac{d}{dx}\varphi(x, y) \cdot Q(x, y)} &= \frac{(2x + y) - (3x + 2y)}{0 \cdot (3xy + y^2) + 1 \cdot (x^2 + xy)} \\ &= \frac{-(x + y)}{-x(x + y)} \\ &= \frac{1}{x} = h(x) = h(\varphi(x, y)) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nun für η :

$$\eta(z) = e^{\int h(\tau) d\tau} = e^{\int \frac{1}{\tau} d\tau} = e^{\log(|z|)} = |z|$$

für alle $z \in \mathbb{R}$. Damit gilt nun:

$$\eta = \eta(\varphi(x, y)) = |\varphi(x, y)| = |x| \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{R}$.

Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf der linken und der rechten Halbebene

$$\tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy = 0 \quad (1')$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, y) &= \mu(x)P(x, y) \\ &= |x|(3xy + y^2) \\ &= 3x|x|y + |x|y^2, \\ \tilde{Q}(x, y) &= \mu(x)Q(x, y) \\ &= |x|(x^2 + xy) \\ &= |x|x^2 + x|x|y = |x|^3 + x|x|y \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\tilde{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla \tilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{P}(x, y) \\ \tilde{Q}(x, y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.

Schritt 3. Finden einer Stammfunktion \tilde{F} : Dazu integrieren wir z.B. die x -Ableitung von \tilde{F} (also \tilde{P}) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int \tilde{P}(z, y) dz = \int (3z|z|y + |z|y^2) dz \\ &= \text{sign}(x)x^3y + \frac{\text{sign}(x)}{2}x^2y^2 + C(y) \\ &= |x|^3y + \frac{x|x|}{2}y^2 + C(y) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned} |x|x^2 + x|x|y = \tilde{Q}(x, y) &= \frac{d}{dy}\tilde{F}(x, y) \\ &= |x|^3 + x|x|y + C'(y) \\ \Leftrightarrow C'(y) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. C ist konstant. O.B.d.A. wählen wir $C \equiv 0$. Damit lautet die Stammfunktion \tilde{F} :

$$\tilde{F}(x, y) = |x|^3y + \frac{x|x|}{2}y^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (1'): Nun finden wir für alle Paare $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ mit $\tilde{Q}(x_0, y_0) \neq 0$ ein offenes Intervall $I_x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_0 \in I_x$ so, dass wir eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y: I_x \rightarrow \mathbb{R}$ finden mit

$$|x|^3y(x) + \frac{x|x|}{2}y(x)^2 = \tilde{F}(x, y(x)) = \tilde{F}(x_0, y_0) \text{ für alle } x \in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (1') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (1).
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y : Wir können über die Mitternachtsformel/ p - q -Formel die Gleichung

$$|x|^3 y(x) + \frac{x|x|}{2} y(x)^2 = \tilde{F}(x_0, y_0)$$

nach $y(x)$ auflösen, dadurch ergibt sich

$$y(x) = \frac{-|x|^3 \pm \sqrt{|x|^6 - 2x|x|\tilde{F}(x_0, y_0)}}{x|x|}$$

als Lösung für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$|x|^6 - 2x|x|\tilde{F}(x_0, y_0) \geq 0.$$

□

(2) Wir setzen erstmal

$$P(x, y) = \cos(x) \text{ und } Q(x, y) = 4e^{-y} + \sin(x)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und weiter $x_0 = 0, y_0 = \frac{\pi}{2}$.

Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} P(x, y) &= 0, \\ \frac{d}{dx} Q(x, y) &= \cos(x) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dy} P(x, y) = \frac{d}{dx} Q(x, y) = \cos(x) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ für } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{d}{dy} P(x, y) \neq \frac{d}{dx} Q(x, y)$$

für alle $(x, y) \in \Omega \setminus M$, d.h. die Differentialgleichung (2) ist nicht exakt.

Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(y)$ finden, d.h. $\varphi(x, y) = y$.
 Damit ist

$$\frac{d}{dx} \varphi(x, y) = 0 \text{ und } \frac{d}{dy} \varphi(x, y) = 1.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dx} Q(x, y) - \frac{d}{dy} P(x, y)}{\frac{d}{dy} \varphi(x, y) \cdot P(x, y) - \frac{d}{dx} \varphi(x, y) \cdot Q(x, y)} &= \frac{\cos(x) - 0}{1 \cdot \cos(x) + 0 \cdot (4ye^{-y} + \sin(x))} \\ &= \frac{\cos(x)}{\cos(x)} \\ &= 1 = h(y) = h(\varphi(x, y)) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nun für η :

$$\eta(z) = e^{\int h(\tau) d\tau} = e^{\int 1 d\tau} = e^z$$

für alle $z \in \mathbb{R}$. Damit gilt nun:

$$\eta = \eta(\varphi(x, y)) = e^y \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf ganz \mathbb{R}^2

$$\tilde{P}(x, y) dx + \tilde{Q}(x, y) dy = 0 \quad (2')$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x, y) &= \mu(x)P(x, y) \\ &= e^y \cos(x) \\ \tilde{Q}(x, y) &= \mu(x)Q(x, y) \\ &= e^y (4ye^{-y} + \sin(x)) \\ &= 4y + e^y \sin(x)\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\tilde{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla \tilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{P}(x, y) \\ \tilde{Q}(x, y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.

Schritt 3. Finden einer Stammfunktion \tilde{F} : Dazu integrieren wir z.B. die x -Ableitung von \tilde{F} (also \tilde{P}) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \int \tilde{P}(z, y) dz = \int e^y \cos(z) dz \\ &= e^y \sin(x) + C(y)\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}4y + e^y \sin(x) &= \tilde{Q}(x, y) = \frac{d}{dy} \tilde{F}(x, y) \\ &= e^y \sin(x) + C'(y) \Leftrightarrow C'(y) = 4y\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. für die Funktion C folgt nun:

$$C(y) = \int 4z dz = 2y^2 + C$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wähle wir $C = 0$, d.h.

$$C(y) = 2y^2$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Stammfunktion \tilde{F} :

$$\tilde{F}(x, y) = e^y \sin(x) + 2y^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (2'): Wegen

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x_0, y_0) &= \tilde{Q}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}} \sin(0) = 2\pi \neq 0\end{aligned}$$

finden wir ein Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 = x_0 \in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y: I_x \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$e^{y(x)} \sin(x) + 2y(x)^2 = \tilde{F}(x, y(x)) = \tilde{F}(x_0, y_0) = \tilde{F}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \sin(0) + 2\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} \text{ für alle } x \in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (2') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (2).

Schritt 5. Auflösbarkeit nach y : Wir können die obere Gleichung

$$e^{y(x)} \sin(x) + 2y(x)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

nicht explizit nach $y(x)$ auflösen, sondern nur implizit lösen. □

(3) Wir setzen erstmal

$$P(x, y) = x + y \text{ und } Q(x, y) = -\frac{x^2}{y}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und weiter $x_0 = e, y_0 = 1$.

Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}P(x, y) &= 1, \\ \frac{d}{dx}Q(x, y) &= -\frac{2x}{y}\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}1 &= \frac{d}{dy}P(x, y) = \frac{d}{dx}Q(x, y) = -\frac{2x}{y} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{y}{2}\end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{y}{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{d}{dy}P(x, y) \neq \frac{d}{dx}Q(x, y)$$

für alle $(x, y) \in \Omega \setminus M$, d.h. die Differentialgleichung (3) ist nicht exakt.

Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(xy)$ finden, d.h. $\varphi(x, y) = xy$. Damit ist

$$\frac{d}{dx}\varphi(x, y) = y \text{ und } \frac{d}{dy}\varphi(x, y) = x.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{d}{dx}Q(x, y) - \frac{d}{dy}P(x, y)}{\frac{d}{dy}\varphi(x, y) \cdot P(x, y) - \frac{d}{dx}\varphi(x, y) \cdot Q(x, y)} &= \frac{-\frac{2x}{y} - 1}{x \cdot (x + y) - y \cdot \left(-\frac{x^2}{y}\right)} \\ &= \frac{-\frac{2x}{y} - 1}{x^2 + xy + x^2} \\ &= \frac{-(2x + y)}{xy(2x + y)} \\ &= -\frac{1}{xy} = h(xy) = h(\varphi(x, y))\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daraus folgt nun für η :

$$\eta(z) = e^{\int h(\tau) d\tau} = e^{\int -\frac{1}{\tau} d\tau} = e^{-\log(|z|)} = \frac{1}{|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Damit gilt nun:

$$\eta = \eta(\varphi(x, y)) = \frac{1}{|xy|} \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf jedem Quadranten

$$\tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy = 0 \quad (3')$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x, y) &= \mu(x)P(x, y) \\ &= \frac{x + y}{xy} \\ \tilde{Q}(x, y) &= \mu(x)Q(x, y) \\ &= -\frac{x^2}{xy^2} \\ &= -\frac{x}{y^2}\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$.

Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktionen $\tilde{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla \tilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{P}(x, y) \\ \tilde{Q}(x, y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

ist.

Schritt 3. Finden einer Stammfunktion \tilde{F} : Dazu integrieren wir z.B. die x -Ableitung von \tilde{F} (also \tilde{P}) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int \tilde{P}(z, y) dz = \int \frac{z+y}{zy} dz = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) dz \\ &= \frac{x}{y} + \log(|x|) + C(y) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{y^2} &= \tilde{Q}(x, y) = \frac{d}{dy} \tilde{F}(x, y) \\ &= -\frac{x}{y^2} + C'(y) \Leftrightarrow C'(y) = 0 \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. für die Funktion C ist konstant. O.B.d.A. wählen wir $C \equiv 0$. Damit lautet die Stammfunktion \tilde{F} :

$$\tilde{F}(x, y) = \frac{x}{y} + \log(|x|)$$

für alle $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$.

Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (3'): Wegen

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(x_0, y_0) &= \tilde{Q}(e, 1) \\ &= -\frac{e}{1^2} = -e \neq 0 \end{aligned}$$

finden wir ein Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $e = x_0 \in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y: I_x \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\frac{x}{y(x)} + \log(|x|) = \tilde{F}(x, y(x)) = \tilde{F}(x_0, y_0) = \tilde{F}(e, 1) = \frac{e}{1} + \log(|e|) = e + 1 \text{ für alle } x \in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (3') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (3).

Schritt 5. Auflösbarkeit nach y : Wir können die obere Gleichung

$$\frac{x}{y(x)} + \log(|x|) = e + 1$$

durch Umstellung explizit nach $y(x)$ auflösen, dies ergibt dann

$$y(x) = \frac{x}{e + 1 - \log(|x|)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{-e^{e+1}, 0, e^{e+1}\},$$

und $y(0) = 0$. □

Aufgabe 3 (Zum Reduktionsverfahren von d'Alembert)

Zeigen Sie, dass die jeweilige Funktion y_1 stets eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung ist. Bestimmen Sie erst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und danach die spezielle zum dazugehörigen Anfangswertproblem. Machen Sie dafür den Ansatz $y_2(x) := y_1(x)v(x)$.

(1) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $y(4) = 1 = y'(4)$.

Hinweis: Die Funktion $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist eine Lösung von (1).

(2) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Hinweis: Die Funktion $y_1(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$, ist eine Lösung von (2).

Lösung von Aufgabe 3

(1) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Schritt 1. y_1 ist Lösung der Differentialgleichung (1): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$y_1'(x) = -\frac{1}{x^2},$$
$$y_1''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$2x^2 y_1''(x) + 3x y_1'(x) - y_1(x) = 2x^2 \cdot \frac{2}{x^3} - \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{4}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x} = 0,$$

d.h. y_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung (1).

Schritt 2. Ansatz $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ einsetzen und auflösen: Es gilt:

$$y_2(x) = \frac{1}{x}v(x),$$
$$y_2'(x) = -\frac{1}{x^2}v(x) + \frac{1}{x}v'(x),$$
$$y_2''(x) = \frac{2}{x^3}v(x) - \frac{1}{x^2}v'(x) - \frac{1}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x)$$
$$= \frac{2}{x^3}v(x) - \frac{2}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x).$$

Damit ist y_2 für gewissen v auch eine Lösung der Differentialgleichung (1), daher gilt:

$$0 = 2x^2 y_2''(x) + 3x y_2'(x) - y_2(x)$$
$$= 2x^2 \left[\frac{2}{x^3}v(x) - \frac{2}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x) \right] + 3x \left[-\frac{1}{x^2}v(x) + \frac{1}{x}v'(x) \right] + \frac{1}{x}v(x)$$
$$= v(x) \left[\frac{4}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x} \right] + v'(x) [-4 + 3] + 2xv''(x)$$
$$= 2xv''(x) - v'(x)$$
$$\Leftrightarrow v''(x) = \frac{1}{2x}v'(x).$$

Setze nun $u := v'$, dann ist $u' = v''$ und wir erhalten die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(x) = v''(x) = \frac{1}{2x}u'(x) = \frac{1}{2x}u(x). \quad (1')$$

Schritt 3. Lösung der homogenen Differentialgleichung (1'): Die Lösung lautet:

$$u(x) = C e^{\int \frac{1}{2x} dz} = C e^{\frac{1}{2} \log(|x|)} = C \sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Berechnung von v bzw. y_2 : Es gilt:

$$v(x) = \int v'(z) dz = \int u(z) dz = \int C \sqrt{|z|} dz$$
$$= \frac{2}{3} C \operatorname{sign}(x) |x|^{\frac{3}{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun haben wir

$$y_2(x) = y_1(x)v(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3} C \operatorname{sign}(x) |x|^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} C |x|^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} C \sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = \frac{3}{2}$ und erhalten so als Lösung:

$$y_2(x) = \sqrt{|x|} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufstellen der allgemeinen Lösung y zur Differentialgleichung (1): Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) erhalten wir also

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 \sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufstellen der speziellen Lösung y zum Anfangswertproblem (1): Es gilt für die Ableitung von y :

$$y'(x) = -\frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2 \operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen den Anfangswertbedingungen $y(4) = y'(4) = 1$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} 1 = y(4) &= \frac{C_1}{4} + C_2\sqrt{4} = \frac{C_1}{4} + 2C_2 \\ \Leftrightarrow 4 &= C_1 + 8C_2 \\ 1 = y'(4) &= -\frac{C_1}{4^2} + \frac{C_2 \operatorname{sign}(4)}{2\sqrt{4}} = -\frac{C_1}{16} + \frac{C_2}{4} \\ \Leftrightarrow 16 &= -C_1 + 4C_2. \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich durch Addieren der beiden Gleichungen:

$$20 = 0C_1 + 12C_2 = 12C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}.$$

Und damit muss für die Konstante C_1 gelten:

$$\begin{aligned} 4 = C_1 + 8C_2 &= C_1 + \frac{40}{3} \\ \Leftrightarrow C_1 &= \frac{12 - 40}{3} = -\frac{28}{3}. \end{aligned}$$

Also ergibt sich als Lösung für unser Anfangswertproblem (1):

$$y(x) = -\frac{28}{3x} + \frac{5}{3}\sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

(2) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Schritt 1. y_1 ist Lösung der Differentialgleichung (2): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^x + xe^x = (1+x)e^x, \\ y_1''(x) &= e^x + e^x + xe^x = (2+x)e^x. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(2+x)e^x - 2(1+x)e^x + xe^x = 0,$$

d.h. y_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung (2).

Schritt 2. Ansatz $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ einsetzen und auflösen: Es gilt:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= xe^x v(x), \\ y_2'(x) &= (1+x)e^x v(x) + xe^x v'(x), \\ y_2''(x) &= (2+x)e^x v(x) + (1+x)e^x v'(x) + (1+x)e^x v'(x) + xe^x v''(x) \\ &= (2+x)e^x v(x) + 2(1+x)e^x v'(x) + xe^x v''(x). \end{aligned}$$

Damit ist y_2 für gewissen v auch eine Lösung der Differentialgleichung (2), daher gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= y_2''(x) - 2y_2'(x) + y_2(x) \\ &= [(2+x)e^x v(x) + 2(1+x)e^x v'(x) + xe^x v''(x)] - 2[(1+x)e^x v(x) + xe^x v'(x)] + xe^x v(x) \\ &= v(x) [(2+x)e^x - 2(1+x)e^x + xe^x] + v'(x) [2(1+x)e^x - 2xe^x] + xe^x v''(x) \\ &= xe^x v''(x) + 2e^x v'(x) \\ &= e^x [xv''(x) + 2v'(x)] \\ \Leftrightarrow v''(x) &= -\frac{2}{x}v'(x) \end{aligned}$$

Setze nun $u := v'$, dann ist $u' = v''$ und wir erhalten die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(x) = v''(x) = -\frac{2}{x}v'(x) = -\frac{2}{x}u(x). \quad (2')$$

Schritt 3. Lösung der homogenen Differentialgleichung (2'): Die Lösung lautet:

$$u(x) = Ce^{\int -\frac{2}{z} dz} = Ce^{-2 \log(|x|)} = \frac{C}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Schritt 4. Berechnung von v bzw. y_2 : Es gilt:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int v'(z) dz = \int u(z) dz = \int \frac{C}{z^2} dz \\ &= -\frac{C}{z} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nun haben wir

$$y_2(x) = y_1(x)v(x) = xe^x \cdot \left(-\frac{C}{x}\right) = -Ce^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = -1$ und erhalten so als Lösung:

$$y_2(x) = e^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufstellen der allgemeinen Lösung y zur Differentialgleichung (2): Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) erhalten wir also

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x e^x + C_2 e^x = (C_1 x + C_2) e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufstellen der speziellen Lösung y zum Anfangswertproblem (2): Es gilt für die Ableitung von y :

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1 e^x + C_1 x e^x + C_2 e^x \\ &= e^x (C_1 + C_2) + C_1 x e^x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen den Anfangswertbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 \cdot 0 \cdot e^0 + C_2 e^0 = C_2 \\ 2 &= y'(0) = e^0 (C_1 + C_2) + C_1 \cdot 0 \cdot e^0 \\ &= C_1 + C_2 = C_1 + 1 \\ \Leftrightarrow C_1 &= 1. \end{aligned}$$

Also ergibt sich als Lösung für unser Anfangswertproblem (2):

$$y(x) = x e^x + e^x = (1 + x) e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung: Wir werden auch relativ bald sehen wie wir solche Differentialgleichungen wie in (2) von Hand selber lösen können, siehe Differentialgleichungen n ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.