20.11.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

3. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 22.11.2018 besprochen)

Aufgabe 1 (Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme.

(1) $y'' + 2y' + 2y = \cos(y)$ mit $y(0) = \frac{1}{5}$, $y'(0) = \frac{7}{5}$.

(2) $y'' + y = \tan(x)$ mit $y(0) = y'(0) = 1$.

(3) $y''' - y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^{-x}$.

Aufgabe 2 (Eulersche Differentialgleichung)

Lösen Sie die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen auf $(0, \infty)$.

(1) $x^2 y'' + xy' - y = 0$.

(2) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = \log(x)$.

Aufgabe 3 (Potenzreihenansatz)

Machen Sie bei den folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertproblemen den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$, dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ stets konstant.

(1) (Legendre Differentialgleichung) $\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \lambda\left(\lambda + 1\right) y = 0$.

(2) (Hermitesche Differentialgleichung) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.

(3) $xy' - y = x^2 \mathrm{e}^x$ mit $y'(0) = 1$.

Aufgabe 4 (Potenzreihenansatz bei singulären Punkten)

In dieser Aufgabe geht es herauszufinden, wieso es wichtig sein kann, dass der Koeffizient vor dem höchsten Ableitungsgrad **nicht** verschwinden sollte für den Potenzreihenansatz. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(*) \begin{cases} x^2 y'' - xy' + y = 0, \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $y_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ für die Differentialgleichung $(*)$. Sehen Sie ein, dass y_1 nicht die allgemeine Lösung sein kann, da die Anfangswerte nicht passen können.

(b) Fassen Sie die Differentialgleichung $(*)$ als Eulersche Differentialgleichung auf und lösen Sie diese.

(c) Stellen Sie die allgemeine und spezielle Lösung der Differentialgleichung bzw. des Anfangswertproblems $(*)$ auf.

(d) Warum funktioniert hier nicht der Potenzreihenansatz (Vermutung)? Im Vergleich zu Aufgabe 3 (1) und (3)?