20.11.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

3. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme.

(1) $y'' + 2y' + 2y = \cos(y)$ mit $y(0) = \frac{1}{5}$, $y'(0) = \frac{7}{5}$.

(2) $y'' + y = \tan(x)$ mit $y(0) = y'(0) = 1$.

(3) $y''' - y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^{-x}$.

Lösung von Aufgabe 1

Vorüberlegung: Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} y^{(n-j)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = s(x)$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und Störfunktion s. Wir möchten nun diese Differentialgleichung allgemein lösen.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen finden: Das charakteristische Polynom $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erhalten wir durch Einsetzen von $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ in den Term

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} y^{(n-j)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

für y und Ausklammern von $\mathrm{e}^{\lambda x}$, d.h.

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \lambda^{n-j} = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \lambda$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$. Dieses Polynom p hat nun nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau n Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Schritt 2. Lösen der homogenen Differentialgleichung: Wir erhalten n linear unabhängige Lösungen $y_{h,1}, \ldots, y_{h,n}$ der homogenen Differentialgleichung passend zu jedem λ_j, $j = 1, \ldots, n$, je nachdem ob es sich um eine einfache oder eine mehrfache Nullstelle von p handelt.
Also ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung gegeben durch:

$$y_h = \sum_{j=1}^{n} C_j y_{h,j} = C_1 y_{h,1} + \ldots + C_n y_{h,n}.$$

Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung Nun machen wir eine Variation der Konstanten (ähnlich wie bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung):

$$y_p(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_{h,j}(x) = C_1(x) y_{h,1}(x) + \ldots + C_n(x) y_{h,n}(x)$$

und setzen diese in die obere Differentialgleichung ein. Dazu bilden wir erstmal die Ableitung

$$y_p'(x) = \big(C_1(x) y_{h,1}'(x) + \ldots + C_n(x) y_{h,n}'(x)\big) + \big(C_1'(x) y_{h,1}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{h,n}(x)\big)$$

Würden wir nun nochmals ableiten, dann bekommen wir allerdings auch höhere Ableitungen von C_j, $j = 1, \ldots, n$, um dies zu verhindern wählen wir diese so, dass die hintere Klammer verschwindet, d.h.

$$C_1'(x)y_{h,1}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}(x) = 0$$

und

$$y_p'(x) = C_1(x)y_{h,1}'(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}'(x).$$

So erhalten wir für die zweite Ableitung

$$y_p''(x) = \left(C_1(x)y_{h,1}''(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}''(x)\right) + \left(C_1'(x)y_{h,1}'(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}'(x)\right).$$

Mit derselben Argumentation machen wir nun auch den Ansatz

$$C_1'(x)y_{h,1}'(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}'(x) = 0$$

und erhalten so

$$y_p''(x) = C_1(x)y_{h,1}''(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}''(x).$$

Führen wir dies immer weiter kommen wir auf die $n-1$ Gleichungen

$$C_1'(x)y_{h,1}^{(k)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}^{(k)} = 0$$

für alle $k = 0, \ldots, n-2$ und erhalten so für die ersten $n-1$ Ableitungen von y_p

$$y_p^{(k)}(x) = C_1(x)y_{h,1}^{(k)}(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}^{(k)}(x)$$

für alle $k = 1, \ldots, n-1$. Durch erneutes Differenzieren der $n-1$ten Ableitungen folgt:

$$y_p^{(n)}(x) = \Big(C_1(x)y_{h,1}^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}^{(n)}(x)\Big) + \Big(C_1'(x)y_{h,1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}^{(n-1)}(x)\Big).$$

Durch Einsetzen in die DIfferentialgleichung bekommen wir nun

$$\begin{aligned}
s(x) = a_n &\left[\Big(C_1(x)y_{h,1}^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}^{(n)}(x)\Big) + \Big(C_1'(x)y_{h,1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}^{(n-1)}(x)\Big)\right] \\
&+ a_{n-1}\left[C_1(x)y_{h,1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}^{(n-1)}(x)\right] + \ldots \\
&+ a_1\left[C_1(x)y_{h,1}'(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}'(x)\right] \\
&+ a_0\left[C_1(x)y_{h,1}(x) + \ldots + C_n(x)y_{h,n}(x)\right] \\
&= C_1'(x)y_{h,1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}^{(n-1)}(x) \\
&+ C_1\left[a_n y_{h,1}^{(n)}(X) + a_{n-1}y_{h,1}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y_{h,1}'(x) + a_0 y_{h,1}(x)\right] + \ldots \\
&+ C_n\left[a_n y_{h,n}^{(n)}(X) + a_{n-1}y_{h,n}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y_{h,n}'(x) + a_0 y_{h,1}(x)\right] \\
&= C_1'(x)y_{h,1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}^{(n-1)}(x),
\end{aligned}$$

die die Funktionen $y_{h,1}, \ldots, y_{h,n}$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind. Also haben wir somit ein Gleichungssystem mit n unbekannten und n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
C_1'(x)y_{h,1}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n} &= 0 \\
C_1'(x)y_{h,1}'(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}' &= 0 \\
&\vdots \\
C_1'(x)y_{h,1}^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}^{(n-2)} &= 0 \\
C_1'(x)y_{h,1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{h,n}^{(n-1)}(x) &= s(x).
\end{aligned}$$

Lösen wir dieses System, erhalten wir erst $C_1', \ldots, C_n'$ und durch integrieren (mit Integrationskonstante null) bekommen wir die $C_1, \ldots, C_n$ und damit dann auch die partikuläre Lösung y_p.

Schritt 3. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich durch

$$y = y_p + y_h.$$

(1) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1 + \mathrm{i})\,(\lambda + 1 + \mathrm{i})\,,$$

da z.B. nach der Mitternachsformel gilt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = -1 \pm \mathrm{i}.$$

Es handelt sich jeweils um einfache Nullstellen. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1)**: Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1):

$$y_h(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} \sin(x) + C_2 \mathrm{e}^{-x} \cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C_1(x)\mathrm{e}^{-x} \sin(x) + C_2(x)\mathrm{e}^{-x} \cos(x)$$

mit Funktionen $C_1(\cdot), C_2(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1'(x)\mathrm{e}^{-x} \sin(x) + C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} \cos(x) &= 0 \\ C_1'(x)\mathrm{e}^{-x} (\cos(x) - \sin(x)) - \mathrm{e}^{-x} C_2'(x) (\cos(x) + \sin(x)) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir so direkt

$$C_1'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} C_2'(x).$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \cos(x) &= C_1'(x)\mathrm{e}^{-x} (\cos(x) - \sin(x)) - \mathrm{e}^{-x} C_2'(x) (\cos(x) + \sin(x)) \\ &= \mathrm{e}^{-x} C_2'(x) \left[-\frac{\cos(x)}{\sin(x)} (\cos(x) - \sin(x)) - \cos(x) - \sin(x) \right] \\ &= -\mathrm{e}^{-x} C_2'(x) \left[\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + \sin(x) \right] \\ &= -\mathrm{e}^{-x} C_2'(x) \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin(x)} = \frac{C_2'(x)}{-\mathrm{e}^{x} \sin(x)} \\ \Leftrightarrow \quad C_2'(x) &= -\mathrm{e}^{x} \sin(x) \cos(x) \end{aligned}$$

damit folgt

$$C_1'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} C_2'(x) = \mathrm{e}^{x} \cos^2(x).$$

Um nun C_1 und C_2 zu berechnen, betrachten wir erstmal die unbestimmten Integrale

$$\int \mathrm{e}^{x} \cos(x) \mathrm{d}x \text{ und } \int x\mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x$$

an. Es gilt laut zweimaliger bzw. einmaliger partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{x} \cos(x) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{x} \cos(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{x} \cos(x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{x} \sin(x) - \int \mathrm{e}^{x} \sin(x) \mathrm{d}x \right) + \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{x} \cos(x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} (\mathrm{e}^{x} \sin(x) + \mathrm{e}^{x} \cos(x)) - \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{x} \cos(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{x} \cos(x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} (\mathrm{e}^{x} \sin(x) + \mathrm{e}^{x} \cos(x))\,, \\ \int x\mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x &= x\mathrm{e}^{x} - \int \mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x \\ &= x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir für $C_1(\cdot)$ durch zweimalige partielle Integration

$$C_1(x) = \int \mathrm{e}^{x} \cos^2(x) \mathrm{d}x = \frac{4}{5} \int \mathrm{e}^{x} \cos^2(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{5} \int \mathrm{e}^{x} \cos(x) \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(x+\sin(x)\cos(x)\right)-\frac{1}{2}\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x\right]-\frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{x}\cos^{2}(x)\mathrm{d}x \quad = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\sin(x)\cos(x)\right.\\
&= \frac{2}{5}\mathrm{e}^{x}\left[\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)+1+\frac{1}{2}\cos^{2}(x)\right].
\end{aligned}
$$

Auf ähnliche Weise können wir $C_2(\cdot)$ auch berechnen, oder wir integrieren partiell in

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= \left[\sin(x)\int \mathrm{e}^{x}\cos^{2}(x)\mathrm{d}x-\cos(x)\int \mathrm{e}^{x}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-x}\\
&= \left[\sin(x)\int \mathrm{e}^{x}\cos^{2}(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\cos^{3}(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\int \mathrm{e}^{x}\cos^{2}(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-x}\\
&= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\cos^{3}(x)+\left(\sin(x)-\frac{\cos(x)}{2}\right)\int \mathrm{e}^{x}\cos^{2}(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-x}\\
&= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\cos^{3}(x)+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{x}\left(\sin(x)-\frac{\cos(x)}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)+1+\frac{1}{2}\cos^{2}(x)\right]\right]\mathrm{e}^{-x}\\
&= \frac{1}{2}\cos^{3}(x)+\frac{2}{5}\sin^{2}(x)\cos(x)+\frac{2}{5}\sin(x)-\frac{1}{5}\cos(x)-\frac{1}{10}\cos^{3}(x)\\
&= \frac{2}{5}\cos^{3}(x)+\frac{2}{5}\sin^{2}(x)\cos(x)+\frac{2}{5}\sin(x)-\frac{1}{5}\cos(x)\\
&= \frac{2}{5}\cos(x)\left(\sin^{2}(x)+\cos^{2}(x)\right)+\frac{2}{5}\sin(x)-\frac{1}{5}\cos(x)\\
&= \frac{1}{5}\cos(x)+\frac{2}{5}\sin(x).
\end{aligned}
$$

Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (1): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) lautet

$$y(x) = y_p(x)+y_h(x) = \frac{1}{5}\cos(x)+\frac{2}{5}\sin(x)+C_1\mathrm{e}^{-x}\sin(x)+C_2\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen zu (1): Wir haben für die Ableitung

$$y'(x) = \frac{2}{5}\cos(x)-\frac{1}{5}\sin(x)+C_1\cos(x)-C_2\sin(x)-C_1\mathrm{e}^{-x}\sin(x)-C_2\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Dann erhalten wir aus den beiden Anfangswertbedingungen $y(0)=\frac{1}{5}$ und $y'(0)=\frac{7}{5}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{5} &= y(0) = \frac{1}{5}+C_2\\
&\Leftrightarrow\ C_2 = 0,\\
\frac{7}{5} &= y'(0)\\
&= \frac{2}{5}+C_1\\
&\Leftrightarrow\ C_1 = \frac{5}{5} = 1.
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Lösung zum Anfangswertproblem (1):

$$y(x) = \frac{1}{5}\cos(x)+\frac{2}{5}\sin(x)+\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. □
(2) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2+1 = (\lambda-\mathrm{i})(\lambda+\mathrm{i}).$$

Es handelt sich jeweils um einfache Nullstellen. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2)**: Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2):

$$y_h(x) = C_1\sin(x)+C_2\cos(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C_1(x)\sin(x)+C_2(x)\cos(x)$$

mit Funktionen $C_1(\cdot), C_2(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) &= 0 \\ C_1'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x) &= \tan(x). \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir so direkt

$$C_1'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} C_2'(x).$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) &= C_1'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x) \\ &= C_2'(x)\left[-\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} - \sin(x)\right] \\ &= -C_2'(x)\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin(x)} = \frac{C_2'(x)}{-\sin(x)} \\ \Leftrightarrow \; C_2'(x) &= -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

damit folgt

$$C_1'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} C_2'(x) = \sin(x).$$

Für $C_1(\cdot)$ gilt:

$$C_1(x) = \int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt laut Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \int -\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \sin(x) - \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x \\ &= \sin(x) - \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\mathrm{d}x \\ &= \sin(x) - \int \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} + \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \sin(x) - \frac{1}{2}\left(-\log\left(|1-\sin(x)|\right) + \log\left(|1+\sin(x)|\right)\right) \\ &= \sin(x) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Damit lautet die partikuläre Lösung zu (2):

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) - \cos(x)\log\left(frac1+\sin(x)1-\sin(x)\right) \\ &= -\cos(x)\log\left(frac1+\sin(x)1-\sin(x)\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. **Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (2)**: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) lautet

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\cos(x)\log\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + C_1\sin(x) + C_2\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen zu (2): Wir haben für die Ableitung

$$y'(x) = C_1\cos(x) - C_2\sin(x) + \sin(x)\log\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) - \cos(x)\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}\frac{\cos(x)\left(1-\sin(x)\right)+\cos(x)\left(1+\sin(x)\right)}{\left(1-\sin(x)\right)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann erhalten wir aus den beiden Anfangswertbedingungen $y(0) = y'(0) = 1$:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= -\cos(0)\log(1) + C_2 = C_2, \\ 1 = y'(0) & \\ &= C_1 - 2 \\ \Leftrightarrow \ C_1 = 3. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung zum Anfangswertproblem (2):

$$y(x) = -\cos(x)\log\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + 3\sin(x) + \cos(x)$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. $\square$

(3) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = (\lambda - 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

durch z.B. Polynomdivision. Es handelt sich jeweils um drei einfache Nullstellen. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3)**: Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3):

$$y_h(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\sin(x) + C_3\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)\sin(x) + C_3(x)\cos(x)$$

mit Funktionen $C_1(\cdot), C_2(\cdot), C_3(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\sin(x) + C_3'(x)\cos(x) = 0 \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\cos(x) - C_3'(x)\sin(x) = 0 \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\sin(x) - C_3'(x)\cos(x) = 2\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Addieren wir nun die erst und die dritte Gleichung miteinander, erhalten wir

$$2C_1'(x)\mathrm{e}^x 0 2\mathrm{e}^{-x} \ \Leftrightarrow \ C_1'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also erhalten wir schonmal

$$C_1(x) = \int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun durch Einsetzen von $C_1'(\cdot)$ und Ummstellen der Gleichungen erhalten wir einmal:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^{-x} + C_2'(x)\cos(x) - C_3'(x)\sin(x) \\ \Leftrightarrow \ C_3'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x} + C_2'(x)\cos(x)}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt laut dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^{-x} + C_2'(x)\sin(x) + C_3'(x)\cos(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x} + C_2'(x)\sin(x) + \frac{\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + C_2'(x)\cos^2(x)}{\sin(x)} \\ &= \mathrm{e}^{-x} + C_2'(x)\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin(x)} + \mathrm{e}^{-x}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= \mathrm{e}^{-x} + \frac{C_2'(x)}{\sin(x)} + \mathrm{e}^{-x}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow \ 0 &= C_2'(x) + \sin(x)\mathrm{e}^{-x} + \cos(x)\mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow \ C_2'(x) &= -\sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)\mathrm{e}^{-x} = -\left(\sin(x) + \cos(x)\right)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. So erhalten wir letztendlich für $C_3'(\cdot)$laut dem trigonometrischen Pythagoras

$$\begin{aligned}
C_3'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x} + C_2'(x)\cos(x)}{\sin(x)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x} - (\sin(x) + \cos(x))\cos(x)\mathrm{e}^{-x}}{\sin(x)} \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1-\cos^2(x)}{\sin(x)}\mathrm{e}^{-x} \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)}\mathrm{e}^{-x} \\
&= \sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)\mathrm{e}^{-x} \\
&= (\sin(x) - \cos(x))\,\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt für die unbestimmten Integrale nach zweimaliger bzw. einmaliger partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\mathrm{e}^{-x} - \int \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\mathrm{e}^{-x} - \sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\,(\sin(x) + \cos(x))\,\mathrm{e}^{-x}, \\
\int \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \sin(x)\mathrm{e}^{-x} + \int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\,(\sin(x) + \cos(x))\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= \frac{1}{2}\,(\sin(x) - \cos(x))\,\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt für $C_2(\cdot)$ bzw. $C_3(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
C_2(x) &= -\int \left(\sin(x)\mathrm{e}^{-x} + \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\,(-(\sin(x) + \cos(x)) + \sin(x) - \cos(x))\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= \cos(x)\mathrm{e}^{-x}, \\
C_3(x) &= \int \left(\sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,(-(\sin(x) + \cos(x)) - (\sin(x) - \cos(x)))\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= -\sin(x)\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. So erhalten wir für die partikuläre Lösung zur Differentialgleichung (3):

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= C_1(x)\mathrm{e}^{x} + C_2(x)\sin(x) + C_3(x)\cos(x) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \sin(x)\cos(x)\mathrm{e}^{-x} - \sin(x)\cos(x)\mathrm{e}^{-x} \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (3): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) lautet

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\sin(x) + C_3\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 2 (Eulersche Differentialgleichung)

Lösen Sie die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen auf $(0, \infty)$.

(1) $x^2y'' + xy' - y = 0.$

(2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \log(x).$

Lösung von Aufgabe 2

(1) Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, genauer eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y(\mathrm{e}^t)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v''(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1):

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) - y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) - v(t) \\ &= v''(t) - v(t). \quad (1') \end{aligned}$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Es handelt sich jeweils um zwei einfache Nullstellen. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1')**: Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1'):

$$v_h(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Rücksubstitution: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$y(x) = v(\log(x)) = C_1\mathrm{e}^{\log(x)} + C_2\mathrm{e}^{-\log(x)} = C_1x + \frac{C_2}{x}$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

(2) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, genauer eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung.
Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y(\mathrm{e}^t)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v''(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (2):

$$\begin{aligned} t = \log\left(\mathrm{e}^t\right) &= \left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''\left(\mathrm{e}^t\right) - 3\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + 4y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) - 3\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + 4v(t) \\ &= v''(t) - v'(t) - 3v'(t) + 4v(t) \\ &= v''(t) - 4v'(t) + 4v(t). \quad (2') \end{aligned}$$

Nun haben wir eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Es handelt sich um eine doppelte Nullstelle. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2')**: Da es sich umeine doppelte Nullstelle handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2'):

$$v_h(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2t\mathrm{e}^{2t} = (C_1 + C_2t)\,\mathrm{e}^{2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die homogene Lösung der Differentialgleichung zu (2') machen wir den Ansatz

$$v_p(t) = C_1(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2(t)t\mathrm{e}^{2t}.$$

Aus der Vorüberlegung von Aufgabe 1 auf diesem Übungsblatt bekommen wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C_1'(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2'(t)t\mathrm{e}^{2t} &= 0 \\ 2C_1'(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2'(t)(1+2t)\mathrm{e}^{2t} &= t. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung umgeformt liefert

$$C_1'(t) = -tC_2'(t);$$

dies eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} t &= 2C_1'(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2'(t)(1+2t)\mathrm{e}^{2t} \\ &= C_2'(t)\left(-2t+1+2t\right)\mathrm{e}^{2t} \\ &= \mathrm{e}^{2t}C_2'(t) \\ \Leftrightarrow\ C_2'(t) &= t\mathrm{e}^{-2t}, \end{aligned}$$

d.h.

$$C_1'(t) = -tC_2'(t) = -t^2\mathrm{e}^{-2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also erhalten jeweils durch einmalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} \\ &= -\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2t}, \\ C_1(t) &= \int -t^2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t} - \int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So folgt für die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} v_p(t) &= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{2t} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2t}t\mathrm{e}^{2t} \\ &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t\right) \\ &= \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}(t+1) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (2'): Für die allgemeine Lösung zu (2') gilt nun:

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) \qquad = \frac{1}{4}(t+1) + \left(C_1 + C_2 t\right)\mathrm{e}^{2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Rücksubstitution: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x) = v\left(\log(x)\right) &= \frac{1}{4}\left(\log(x) + 1\right) + \left(C_1 + C_2\log(x)\right)\mathrm{e}^{2\log(x)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\log(x) + 1\right) + \left(C_1 + C_2\log(x)\right)x^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 3 (Potenzreihenansatz)

Machen Sie bei den folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertproblemen den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$, dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ stets konstant.

(1) (Legendre Differentialgleichung) $\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \lambda\left(\lambda + 1\right) y = 0$.

(2) (Hermitesche Differentialgleichung) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.

(3) $xy' - y = x^2 \mathrm{e}^x$ mit $y'(0) = 1$.

Lösung von Aufgabe 3

(1) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten, genauer ist es die sogenannte Legendre Differentialgleichung. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, so haben wir für die Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Differentialgleichung (1) ist äquivalent zu

$$
y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} y = 0.
$$

Wir können die Koeffizienten jeweils in eine Potenzreihe per geometrische Reihe entwickeln:

$$
\begin{aligned}
\frac{-2x}{1-x^2} &= -2\frac{x}{(1-x)(1+x)} \\
&= -\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] \\
&= \frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{1-x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n - 1\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \\
\frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}
\end{aligned}
$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, d.h. unser Potenzreihenansatz funktioniert sicherlich für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Schritt 2. Ansatz einsetzen: Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(1 - x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda+1) y(x) \\
&= \left(1 - x^2\right) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(\lambda+1) c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} - \left(n(n-1) + 2n - \lambda(\lambda+1)\right) c_n\right] x^n
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n(n+1) - \lambda(\lambda+1))\, c_n\right] x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Per Koeffizientenvergleich (linke und rechte Seite) muss für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n(n+1) - \lambda(\lambda+1))\, c_n = 0$$
$$\Leftrightarrow\ c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda\,(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)},$$

d.h. c_0 legt alle Koeffizienten mit geradem Index fest, sowie c_1 alle Koeffizienten mit ungeradem Index festlegt. Also erhalten wir so als Lösung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ mit

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda\,(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$
(2) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten, genauer ist es die sogenannte Hermitesche Differentialgleichung. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, so haben wir für die Ableitungen:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die beiden Koeffizienten $x \mapsto -2x$ und $x \mapsto \lambda$ sind schon als Potenzreihen mit unendlichem Konvergenzradius dargestellt, d.h. unsere Lösung wird auch Konvergenzradius $R = \infty$ besitzen.
Schritt 2. Ansatz einsetzen: Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
0 &= y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n - \lambda)\, c_n\right] x^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Per Koeffizientenvergleich (linke und rechte Seite) muss für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n - \lambda)\, c_n = 0$$
$$\Leftrightarrow\ c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} c_n$$

d.h. c_0 legt alle Koeffizienten mit geradem Index fest, sowie c_1 alle Koeffizienten mit ungeradem Index festlegt. Also erhalten wir so als Lösung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} c_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

(3) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, so haben wir für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Differentialgleichung (2) ist äquivalent zu

$$y' - \frac{1}{x} y = x\mathrm{e}^x.$$

Wir können die Koeffizienten jeweils in eine Potenzreihe per geometrische Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} x\mathrm{e}^x &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Allerdings ist die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ nicht in eine Potenzreihe um die Null entwickelbar, daher können wir vorerst nichts über den Konvergenzradius/-bereich aussagen. **Schritt 2. Ansatz einsetzen**: Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2 \mathrm{e}^x &= xy'(x) - y(x) \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)\, c_n x^n \\ &= -c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\, c_n x^n. \end{aligned}$$

Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Per Koeffizientenvergleich (linke und rechte Seite) muss für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gelten:

$$\begin{aligned} ((n-1)\, c_n &= \frac{1}{(n-2)!} \\ \Leftrightarrow\ c_n &= \frac{1}{(n-1)\cdot(n-2)!} = \frac{1}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

sowie $-c_0 = 0$, d.h. $c_0 = 0$, sowie $c_1 \in \mathbb{R}$ frei wählbar. Also erhalten wir so als allgemeine Lösung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (Diese Potenzreihe konvergiert offensichtlich für jedes $x \in \mathbb{R}$).

Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangswertbedingung $y'(0) = 1$ muss gelten:

$$1 = y'(0) = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0^n}{(n-1)!} = c_1,$$

damit bekommen wir die spezielle Lösung des Anfangswertproblems (3):

$$y(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= x\mathrm{e}^x
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 4 (Potenzreihenansatz bei singulären Punkten)

In dieser Aufgabe geht es herauszufinden, wieso es wichtig sein kann, dass der Koeffizient vor dem höchsten Ableitungsgrad **nicht** verschwinden sollte für den Potenzreihenansatz. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$
(*) \begin{cases} x^2 y'' - xy' + y = 0, \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0. \end{cases}
$$

Gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $y_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ für die Differentialgleichung $(*)$. Sehen Sie ein, dass y_1 nicht die allgemeine Lösung sein kann, da die Anfangswerte nicht passen können.

(b) Fassen Sie die Differentialgleichung $(*)$ als Eulersche Differentialgleichung auf und lösen Sie diese.

(c) Stellen Sie die allgemeine und spezielle Lösung der Differentialgleichung bzw. des Anfangswertproblems $(*)$ auf.

(d) Warum funktioniert hier nicht der Potenzreihenansatz (Vermutung)? Im Vergleich zu Aufgabe 3 (1) und (3)?

Lösung von Aufgabe 4

Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten.
(a) Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, so haben wir für die Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Differentialgleichung $(*)$ ist äquivalent zu

$$
y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0.
$$

Allerdings sind die Funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ und $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ nicht in eine Potenzreihe um die Null entwickelbar, daher können wir vorerst nichts über den Konvergenzradius/-bereich aussagen. **Schritt 2. Ansatz einsetzen**: Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
0 &= x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - x \sum_{n=1} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) - n + 1] \, c_n x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-2) + 1] \, c_n x^n.$$

Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Per Koeffizientenvergleich (linke und rechte Seite) muss für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$[n(n-1) - n + 1] \, c_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \; c_n = 0 \text{ für } n \neq 1 \text{ und } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Also erhalten wir so als allgemeine Lösung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_1 x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (Diese Potenzreihe konvergiert offensichtlich für jedes $x \in \mathbb{R}$).
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangswertbedingung $y'(1) = 0$ muss gelten:

$$0 = y'(1) = c_1,$$

aber $0 = c_1 = y(1) = 1$ wäre dann ein Widerspruch. Also kann dieser Ansatz nicht alleine zu einer Lösung führen.
(b+c) Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, genauer eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$, so gilt für die Ableitungen:

$$v'(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right),$$
$$v''(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung $(*)$:

$$0 = \left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''\left(\mathrm{e}^t\right) - \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + y\left(\mathrm{e}^t\right)$$
$$= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) - \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + v(t)$$
$$= v''(t) - 2v'(t) + v(t). \qquad (*')$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Es handelt sich jeweils um eine doppelte Nullstelle. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu** $(*')$: Da es sich um eine doppelte Nullstelle handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu $(*')$:

$$v_h(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t \mathrm{e}^t = (C_1 + C_2 t) \, \mathrm{e}^t$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Rücksubstitution: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$y(x) = v\left(\log(x)\right) = C_1 \mathrm{e}^{\log(x)} + C_2 \log(x) \mathrm{e}^{\log(x)} = C_1 x + C_2 \log(x) x$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangswertbedingung $y(1) = 1$ folgt:

$$1 = y(1) = C_1 + C_2 \log(1) = C_1,$$

d.h.

$$y(x) = x + C_2 x \log(x)$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Es gilt für die Ableitung:

$$y'(x) = 1 + C_2 \log(x) + C_2$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Wegen der zweiten Anfangswertbedinung $y'(1) = 0$ ergibt sich nun

$$0 = y'(1) = 1 + C_2 \log(1) + C_2 = 1 + C_2 \;\Leftrightarrow\; C_2 = -1$$

und damit als spezielle Lösung des Anfangswertproblems $(*)$:

$$y(x) = x - x\log(x) \text{ für alle } x \in (0, \infty).$$

(d) Das Problem ist wie oben beschrieben, dass wir die Koeffizienten nicht in Potenzreihen um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ entwicklen können. Ein anderes Beispiel ist z.B.

$$x^2 y' + y = x;$$

hier würde ein naiver Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ zu einer Potenzreihe führen, die nur in $x = 0$ konvergiert, was unbrauchbar wäre. $\square$