

Höhere Mathematik III für Physik

4. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Wiederholung:

Seien $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben.

Definitionen (Lokal/ Global Lipschitz-Stetig in der zweiten Komponente): Wir nennen die Funktion f

- global Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente auf U genau dann, wenn eine (Lipschitz-)Konstante $L \geq 0$ existiert mit

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \text{ für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in U.$$

- lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente auf U genau dann, wenn es zu jedem Punkt $(x_*, y_*) \in U$ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ mit $(x_*, y_*) \in \tilde{U}$ gibt so, dass es eine Lipschitz-Konstante $L(\tilde{U}) =: L \geq 0$ gibt mit

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \text{ für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in \tilde{U}.$$

Satz von Picard-Lindelöf (Lokale Version): Sei f stetig und lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, dann existiert für alle $(x_0, y_0) \in U$ eine lokal eindeutige Lösung $y: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu dem Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Für das maximale Intervall muss

$$\varepsilon = \min \left\{ a, \frac{b}{\sup_{(x,y) \in Z} |f(x,y)|} \right\}$$

gelten, wobei $a, b > 0$ sind für den abgeschlossenen Zylinder

$$Z = [x_0 - a, x_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)} \subseteq U.$$

Wir bezeichnen mit

$$B_r(x) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

den offenen Ball mit Radius $r > 0$ um den Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

Satz von Picard-Lindelöf (Globale Version): Sei $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und global Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente. Dann existiert für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zum Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Picard-Iteration: Setze $y_0(x) \equiv y_0$ und für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_n(\tau)) d\tau.$$

Banachscher Fixpunktsatz: Seien (X, d_X) ein vollständiger metrischer Raum, $M \subseteq X$ abgeschlossen mit $M \neq \emptyset$, sowie $\varphi: M \rightarrow M$ eine kontraktive Selbstabbildung d.h. $\varphi(M) \subseteq M$ und φ ist eine Kontraktion auf M (Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \in [0, 1)$). Dann existiert genau ein $\tilde{x} \in M$ so, dass \tilde{x} ein Fixpunkt von φ auf der Menge M ist, d.h.

$$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} \text{ (Fixpunkt)}$$

ist.

Fixpunkt-Iteration: Sei $x_0 \in M$ beliebig und setze für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Dann konvergiert diese Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gegen den Fixpunkt \tilde{x} :

$$\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(\tilde{x}).$$

Aufgabe 1 (Approximation Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

Seien $a > 0$ fest, $M := [0, a] \times \mathbb{R}$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Weiter sei f stetig auf M und gleichmäßig Lipschitz-stetig bzgl der zweiten Komponente. Wir setzen die Funktionenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $[0, a]$ durch

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{n+1} := x_0 + tx_1 + \int_0^t (t - \tau) f(\tau, x_n(\tau)) d\tau$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie nun, dass die Funktionenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig auf $[0, a]$ konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass die Grenzfunktion $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ zweimal differenzierbar ist mit

$$x''(t) = f(t, x(t)) \text{ auf } [0, a]$$

und Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x'(0) = x_1$.

Lösung von Aufgabe 1

Es gilt für alle $\tau \in [0, a]$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(\tau, x_n(\tau)) \in [0, a] \times \mathbb{R},$$

d.h. die rekursive Vorschrift ist wohl-definiert. Es gilt für alle $t \in [0, a]$ laut Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)| &= \left| x_0 + tx_1 + \int_0^t (t - \tau) f(\tau, x_0(\tau)) d\tau - x_0 \right| \\ &\leq t|x_1| + \int_0^t (t - \tau) |f(\tau, x_0)| d\tau \\ &\leq t|x_1| + \int_0^t (t - \tau) d\tau \sup_{s \in [0, a]} |f(s, x_0)| \\ &= t|x_1(t)| + \left(t^2 - \frac{1}{2}t^2 \right) K \\ &= t|x_1(t)| + \frac{1}{2}t^2 K \end{aligned}$$

mit

$$K := \sup_{s \in [0, a]} |f(s, x_0)| \in [0, \infty).$$

Allgemein gilt:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = L^n \left(|x_1(t)| \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} K \right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0, t \in [0, a].$$

Dies zeigen wir per vollständige Induktion.

Induktionsanfang $n = 0$: Wir haben so schon oben gezeigt für alle $t \in [0, a]$:

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq t|x_1(t)| + \frac{1}{2}t^2 K = L^0 \left(|x_1(t)| \frac{t^{0+1}}{(0+1)!} + \frac{t^{0+2}}{(0+2)!} K \right).$$

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses n gelte:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = L^n \left(|x_1(t)| \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} K \right) \text{ für alle } t \in [0, a].$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$: Es gilt für alle $t \in [0, a]$ laut Dreiecks-Ungleichung, Lipschitz-Stetigkeit von $f(t, \cdot)$ und der Induktionsannahme:

$$\begin{aligned} |x_{(n+1)+1}(t) - x_{n+1}(t)| &= \left| x_0 + tx_1(t) + \int_0^t (t - \tau) f(\tau, x_{n+1}(\tau)) d\tau - \left(x_0 + tx_1(t) + \int_0^t (t - \tau) f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right) \right| \\ &\leq \int_0^t (t - \tau) |f(\tau, x_{n+1}(\tau)) - f(\tau, x_n(\tau))| d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq L \int_0^t (t-\tau) |x_{n+1}(\tau) - x_n(\tau)| \, d\tau \\
&\leq LL^n \int_0^t (t-\tau) \left(|x_1| \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\tau^{2n+2}}{(2n+2)!} K \right) \, d\tau \\
&= L^{n+1} \int_0^t \left(|x_1| \frac{t\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t\tau^{2n+2}}{(2n+2)!} K - |x_1| \frac{\tau^{2n+2}}{(2n+1)!} - \frac{\tau^{2n+3}}{(2n+2)!} K \right) \, d\tau \\
&= L^{n+1} \left(|x_1| \frac{t^{2n+3}}{(2n+2)(2n+1)!} + \frac{t^{2n+4}}{(2n+3)(2n+2)!} K - |x_1| \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)!} - \frac{t^{2n+4}}{(2n+4)(2n+2)!} K \right) \\
&= L^{n+1} \left(|x_1(t)| \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!} + \frac{t^{2n+4}}{(2n+4)!} K \right) \\
&= L^{n+1} \left(|x_1(t)| \frac{t^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} + \frac{t^{2(n+1)+2}}{(2(n+1)+2)!} K \right).
\end{aligned}$$

Damit ist die Abschätzung bewiesen. Wir erhalten per Teleskopsumme und Dreiecks-Ungleichung damit für alle $t \in [0, a]$:

$$\begin{aligned}
|x_{n+l}(t) - x_n(t)| &= \left| \sum_{j=n}^{n+l-1} (x_{j+1}(t) - x_j(t)) \right| \\
&\leq \sum_{j=n}^{n+l-1} |x_{j+1}(t) - x_j(t)| \\
&\leq \sum_{j=n}^{n+l-1} L^j \left(|x_1| \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} + \frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!} K \right) \\
&\leq \sum_{j=n}^{n+l-1} L^j \left(|x_1| \frac{a^{2j+1}}{(2j+1)!} + \frac{a^{2j+2}}{(2j+2)!} K \right) \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

für $n, l \rightarrow \infty$ laut dem Cauchy-Kriterium für Reihen, d.h. aber, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0, a]$ konvergiert. Da die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, konvergiert sie insbesondere punktweise, d.h. wir setzen zu $t \in [0, a]$:

$$x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t).$$

Dadurch erhalten wir die Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}(t) \\
&= x_0 + tx_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (t-\tau) f(\tau, x_n(\tau)) \, d\tau \\
&= x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau) \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tau, x_n(\tau)) \, d\tau \\
&= x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau) f(\tau, x(\tau)) \, d\tau.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite stetig-differenzierbar ist, ist automatisch $x \in C^1[0, a]$ mit Ableitung

$$x'(t) = x_1 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) \, d\tau \text{ für } t \in [0, a].$$

Erneut ist die rechte Seite stetig-differenzierbar, also auch x'' und damit $x \in C^2[0, a]$ mit zweiter Ableitung:

$$x''(t) = f(t, x(t)) \text{ für } t \in [0, a].$$

Weiter gilt:

$$x(0) = x_0 \text{ und } x'(0) = x_1.$$

□

Aufgabe 2 (Anwendung vom Satz von Picard-Lindelöf)

Gegeben sei die Funktion

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, y') \mapsto x^2 - 2xy' + \frac{3}{2}y'^2 - y$$

und ein Punkt $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x_0, y_0, y'_0) = 0 \text{ und } y'_0 \neq \frac{2}{3}x_0.$$

Zeigen Sie, dass das so gegebene implizite Anfangswertproblem

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

lokal eindeutig lösbar ist.

Lösung von Aufgabe 2

Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = F(x, y, y') &= x^2 - 2xy' + \frac{3}{2}y'^2 - y \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 6(x^2 - y)}}{3} = \frac{2}{3}x \pm \frac{1}{3}\sqrt{6y - 2x^2} = \frac{2}{3}x \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{y - \frac{x^2}{3}} = \frac{2}{3}x \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y - \frac{x^2}{3}}. \end{aligned}$$

O.B.d.A. wählen wir $y'_0 > \frac{2}{3}x_0$, d.h. wir beschäftigen uns mit dem Fall

$$y'(x) = \frac{2}{3}x + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y(x) - \frac{x^2}{3}}.$$

Laut der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf hat das Anfangswertproblem

$$(*) \begin{cases} y'(x) = \frac{2}{3}x + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y(x) - \frac{x^2}{3}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Menge

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{x^2}{3} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist mit $x_0 \in I$. Wähle I als das maximale Intervall.

Behauptung: Die Funktion y löst das implizite Anfangswertproblem

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

auf der Menge

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0, z \neq \frac{2}{3}x, x \in I \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

eindeutig und maximal.

Annahme: Sei $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Lösung mit $y = \tilde{y}$ auf \tilde{I} und \tilde{I} maximal. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} a &:= \inf \left\{ x \in \tilde{I} : \tilde{y}'(t) > \frac{2}{3} \text{ für alle } t \in (x, x_0) \right\}, \\ b &:= \sup \left\{ x \in \tilde{I} : \tilde{y}'(t) > \frac{2}{3} \text{ für alle } t \in (x_0, x) \right\}, \\ J &:= (a, b). \end{aligned}$$

Da die Funktion \tilde{y}' stetig ist auf \tilde{I} folgt $J \neq \emptyset$ und $\tilde{y}|_J$ löst das Anfangswertproblem (*).

Es ist zu zeigen, dass $J = \tilde{I}$ ist. Wäre $b < \sup \tilde{I}$, dann würden wir aus

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \tilde{y}'(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \tilde{y}'(x) > \frac{2}{3}b$$

einen Widerspruch zur Definition von b bzw. dem Supremum erhalten. Also ist $b = \sup \tilde{I}$. Wäre $a > \inf \tilde{I}$, dann würden wir aus

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{y}'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{y}'(x) > \frac{2}{3}b$$

einen Widerspruch zur Definition von a bzw. dem Infimum erhalten. Also ist $a = \inf \tilde{I}$. Ebenso $a, b \notin \tilde{I}$. Sind nun $a, b \notin \tilde{I}$, dann folgt

$$y'(x) > \frac{2}{3}x \text{ für alle } x \in \tilde{I}$$

und \tilde{y} löst das Anfangswertproblem (*). Wegen der Eindeutigkeit und der Maximalität der Intervalle muss nun $\tilde{I} = I$ folgen. □

Aufgabe 3 (Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes)

Gegeben Sei der Operator $T: C^0[0, 1] \rightarrow C^0[0, 1]$ durch

$$(Tf)(x) := 1 + x \int_0^x tf(t)dt, \quad x \in [0, 1], \quad f \in C^0[0, 1].$$

Zeigen Sie, dass der Operator T genau einen Fixpunkt $f^* \in C^0[0, 1]$ hat. Welches Anfangswertproblem löst dann dieser Fixpunkt f^* ?

Lösung von Aufgabe 3

Bekannt ist, dass der Raum $(C^0[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum (vollständiger normierter Vektorraum) ist. So ist auch die Menge $C^0[0, 1]$ abgeschlossen und nicht-leer. Wir zeigen, dass der Operator T eine Kontraktion ist, seien dazu $x \in [0, 1]$ und $f, g \in C^0[0, 1]$ beliebig, so gilt per Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tg)(x)| &= \left| 1 + x \int_0^x tf(t)dt - \left(1 + x \int_0^x tg(t)dt \right) \right| \\ &= x \left| \int_0^x t(f(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq x \int_0^x t |f(t) - g(t)| dt \\ &\leq x \int_0^x t dt \sup_{s \in [0, 1]} |f(s) - g(s)| \\ &= \frac{1}{2}x^2 \|f - g\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun:

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |(Tf)(x) - (Tg)(x)| \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty,$$

d.h. T ist eine Kontraktion. So sind alle Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt und nach diesen existiert genau eine Funktion $f_* \in C^0[0, 1]$ mit

$$f_*(x) = (Tf_*)(x) = 1 + x \int_0^x tf_*(t)dt \text{ für alle } x \in [0, 1].$$

So ist die rechte Seite stetig-differenzierbar, also ist $f_* \in C^1[0, 1]$ mit der Ableitung

$$f_*'(x) = \int_0^x tf_*(t)dt + x^2 f_*(x) \text{ für alle } x \in [0, 1].$$

Nun ist erneut die rechte Seite stetig-differenzierbar, demnach ist f_*' stetig-differenzierbar, also ist $f_* \in C^2[0, 1]$ mit zweiter Ableitung

$$f_*''(x) = xf_*(x) + 2xf_*'(x) + x^2 f_*''(x) = 3xf_*(x) + x^2 f_*'(x).$$

Weiter ist $f_*(0) = 1$ und $f_*'(0) = 0$. So ergibt sich das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} f_*'' - x^2 f_*' - 3xf_* = 0, \\ f_*(0) = 1, \\ f_*'(0) = 0. \end{cases}$$

□

Aufgabe 4 (Typische Picard-Lindelöf-Aufgabe)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung y auf dem Intervall $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hat und dieses auch gleich das größte Lösungsintervall ist, welches wir mithilfe des Satzes von Picard-Lindelöf erhalten. Berechnen Sie anschließend die erste Schritte der Picard-Iteration x_0, x_1, x_2 und x_3 .

Lösung von Aufgabe 4

Setze $f(x, y) = x^2 + y^2$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, also ist $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$. Zu $r, s > 0$ haben wir das Rechteck $R = (-r, r) \times (-s, s)$ und

$$K := \sup_{(x,y) \in R} |f(x, y)| = r^2 + s^2.$$

Es gilt laut Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |x^2 + y_1^2 - (x^2 + y_2^2)| = |y_1^2 - y_2^2| \\ &= |y_1 + y_2| |y_1 - y_2| \\ &\leq (|y_1| + |y_2|) |y_1 - y_2| \\ &\leq 2s |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in R$. Laut der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf eine eindeutige Lösung $y: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ für geeignete $r, s > 0$. Wähle r, s maximal, so ist die maximale Länge des Intervalls $l := 2 \min \left\{ r, \frac{s}{r^2 + s^2} \right\}$. Wir betrachten die Funktion

$$g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad s \mapsto \frac{s}{r^2 + s^2}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{r^2 + s^2 - 2s^2}{(r^2 + s^2)^2} = \frac{r^2 - s^2}{(r^2 + s^2)^2} \text{ für alle } s \in (0, \infty), \\ 0 = g'(s) &= \frac{r^2 - s^2}{(r^2 + s^2)^2} \Leftrightarrow r^2 - s^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = s^2 \Leftrightarrow s = \pm r \\ g''(s) &= \frac{-2s(r^2 + s^2)^2 - 4(r^2 - s^2)(r^2 + s^2)s}{(r^2 + s^2)^4} \\ &= \frac{-2(sr^2 + s^3 + 2r^2s - 2s^3)}{(r^2 + s^2)^3} = -2 \frac{3sr^2 - s^3}{(r^2 + s^2)^3} \text{ für alle } s \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Weiter folgt:

$$g''(r) = -2 \frac{3r^3 - r^3}{8r^6} = -\frac{1}{2} r^{-3} < 0 \text{ und } g(r) = \frac{r}{2r^2} = \frac{1}{2r}.$$

Damit wird l maximal für

$$r = g(r) = \frac{1}{2r} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also muss $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gelten und wir haben für die eindeutige maximale Lösung $y: \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \mathbb{R}$. □