Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 11. November 2020 bis 17. November 2020

Aufgabe 1:
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie geeignete Definitionsbereiche an.

(i) $y' = \frac{x-2xy}{1+x^2}$, $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$.

(ii) $y' = \frac{3x^2-1}{x^3-x}y + x^2 - 1$, $y(2) = 6$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
In Teil (i) bestimmen wir die Lösung durch Bestimmung aller Lösungen der homogenen Gleichung, danach finden wir eine partikuläre Lösung und schließlich eliminieren wir den verbleibenden Freiheitsgrad mit dem Anfangswert. In Teil (ii) nutzen wir die "Variation der Konstanten"-Formel. Beide Lösungswege sind absolut gleichwertig, wobei man sich für die erste Variante weniger merken muss aber mehr rechnet. Für die zweite Variante muss man eine größere Formel wissen aber weniger rechnen (weil die Formel genau die Rechnungen der ersten Variante zusammenfasst).

(i) Durch Umformen des Bruchs erkennen wir, dass es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt.

$$y' = \frac{x-2xy}{1+x^2} = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{x}{1+x^2} = a(x)\,y + b(x),$$

mit den stetigen Funktionen $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a(x) := -\frac{2x}{1+x^2}$, $b(x) := \frac{x}{1+x^2}$. Wir betrachten zuerst die homogene Differentialgleichung

$$y_h' = -\frac{2x}{1+x^2}y_h = a(x)\,y_h.$$

Wir definieren mit $x_0 := \sqrt{2}$ die Funktionen

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}}^{x} -\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\ln\left(1+t^2\right)\right]_{t=\sqrt{2}}^{t=x} = -\ln\left(1+x^2\right) + \ln(3) = \ln\left(\frac{3}{1+x^2}\right),$$
$$z(x) := \mathrm{e}^{A(x)} = \exp\left(\ln\left(\frac{3}{1+x^2}\right)\right) = \frac{3}{1+x^2}$$

Damit ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen Differentialgelichung gegeben durch

$$y_h(x) = c\,z(x) = \frac{3c}{1+x^2}.$$

Eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung $y' = \frac{x-2xy}{1+x^2}$ erhalten wir durch "Variation der Konstanten" c. Hierfür machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = c(x)z(x).$$

Wir setzen diesen Ansatz in die Gleichung ein, nutzen $z'(x) = a(x)z(x)$ und rechnen

$$\begin{aligned}
&& c'(x)z(x) + c(x)a(x)z(x) = c'(x)z(x) + c(x)z'(x) &= y_p'(x) \\
&& &\stackrel{!}{=} a(x)\, y_p(x) + b(x) = a(x)c(x)z(x) + b(x), \\
\Leftrightarrow && c'(x) &= \frac{b(x)}{z(x)}, \\
\Leftarrow && c(x) &= \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{3} \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{3} t \,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{6}.
\end{aligned}$$

Hier haben wir willkürlich die untere Integrationsgrenze 0 gewählt. Eine partikuläre Lösung y_p ist also gegeben durch

$$y_p(x) = c(x)z(x) = \frac{x^2}{6} \cdot \frac{3}{1+x^2} = \frac{x^2}{2(1+x^2)}.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung $y' = \frac{x-2xy}{1+x^2}$ lauten also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{3c}{1+x^2} + \frac{x^2}{2(1+x^2)} = \frac{6c+x^2}{2(1+x^2)}, \qquad \text{mit } \; c \in \mathbb{C}.$$

Wir finden die noch "freie" Konstante c durch einsetzen des Anfangswertes

$$\frac{1}{3} \stackrel{!}{=} y(\sqrt{2}) = \frac{6c+2}{2(1+2)} = c + \frac{1}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad c = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$y(x) = \frac{x^2}{2(1+x^2)}.$$

Als maximales Existenzintervall lesen wir $I = \mathbb{R}$ ab.

(ii) Wir definieren $x_0 := 2$, $y_0 = 6$ und schreiben $a\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $a(x) := \frac{3x^2-1}{x^3-x}$, $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b(x) := x^2-1$. Diese beiden Funktionen sind als Quotienten von Polynomen stetig auf ihren Definitionsbereichen. Damit berechnen wir

$$A(x) := \int_{x_0}^x a(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^x \frac{3t^2-1}{t^3-t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln\big(t^3-t\big)\big]_{t=2}^{t=x} = \ln\big(x^3-x\big) - \ln(6) = \ln\bigg(\frac{x^3-x}{6}\bigg).$$

Wir nutzen nun die "Variation der Konstanten"-Formel zur Bestimmung der Lösung y des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_0 \mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int_{x_0}^x \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 6 \cdot \frac{x^3-x}{6} + \frac{x^3-x}{6} \cdot \int_2^x \frac{6}{t^3-t}(t^2-1)\,\mathrm{d}t \\
&= \big(x^3-x\big) \cdot \bigg(1 + \int_2^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\bigg) \\
&= \big(x^3-x\big) \cdot \bigg(1 + \ln\Big(\frac{x}{2}\Big)\bigg).
\end{aligned}$$

Den maximale Definitionsbereich dieser Lösung lesen wir ab als $I = (1,\infty)$, wobei hier der Definitionsbereich von a zu beachten ist!

Bemerkung: Wir können Definitionsbereich mit folgenden Ideen vergrößern: Statt $y' = a(x)y + b(x)$ zu verlangen (a ist in $x = 1$ nicht wohldefiniert), multiplizieren wir die Gleichung mit (x^3-x), d.h. wir verlangen $(x^3-x)\,y' = 3x^2y - y + x(x^2-1)^2$. Hier kann $x = 1$ problemlos eingesetzt werden. Unsere gefundene Lösung $y(x) = \big(x^3-x\big) \cdot \big(1 + \ln\big(\frac{x}{2}\big)\big)$ lässt sich direkt auf $J = (0,\infty)$ fortsetzen und direktes Einsetzen liefert, dass y die ursprüngliche Differenzialgleichung in ganz J erfüllt.

Aufgabe 2:
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

(i) $y' + 2\tan(x)y - \tan(x)\sqrt{y} = 0$, $y(0) = 1$.

(ii) $y' + \frac{1}{x}y - \frac{5}{3}x\,y^{-2} = 0$, $y(1) = 1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Wir schreiben die Differentialgleichung um zu

$$0 = y' + 2\tan(x)y - \tan(x)\sqrt{y} = y' + g(x)\,y + h(x)\,y^{\alpha},$$

mit $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) \coloneqq 2\tan(x)$, $h(x) = -\tan(x)$, $\alpha \coloneqq \frac{1}{2}$. Es handelt sich also eine Bernoulli-Differentialgleichung. Die Anfangswerte lauten $x_0 \coloneqq 0$, $y_0 \coloneqq 1$. Wir folgen der Lösungstechnik der Vorlesung und multiplizieren die Differentialgleichung mit $(1-\alpha)y^{-\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}0 &= (1-\alpha)y'y^{-\alpha} + (1-\alpha)g(x)\,y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x)\\ &= \left(y^{1-\alpha}\right)' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x)\\ &= (\sqrt{y})' + (1-\alpha)g(x)\sqrt{y} + (1-\alpha)h(x).\end{aligned}$$

Nun setzen wir $z(x) \coloneqq y(x)^{1-\alpha} = \sqrt{y}$ und erhalten die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned}0 &= z' + (1-\alpha)g(x)\,z + (1-\alpha)h(x) = z' + \frac{1}{2}\cdot 2\tan(x)z - \frac{1}{2}\cdot\tan(x)\\ &= z' + \tan(x)z - \frac{1}{2}\tan(x).\end{aligned}$$

Als Anfangswert für das Anfangswertproblem in z erhalten wir

$$z(0) = z(x_0) = \sqrt{y(x_0)} = \sqrt{y_0} = 1.$$

Zu Lösung des Anfangswertproblems in z

$$\begin{cases} z' = -(1-\alpha)g(x)\,z - (1-\alpha)h(x) = -\tan(x)z + \frac{1}{2}\tan(x),\\ z(0) = 1\end{cases}$$

nutzen wir die "Variation der Konstanten"-Formel. Hierzu berechnen wir wieder zu erst

$$A(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} -(1-\alpha)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x -\tan(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}t = [\ln(\cos(t))]_{t=0}^{t=x} = \ln(\cos(x)).$$

Beachten Sie, dass diese Rechnung vorerst nur für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zulässig ist. Dies ist das größte Intervall um $x_0 = 0$, sodass der Integrand bis x integrierbar ist. Damit erhalten wir für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned}z(x) &= z_0\mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)}\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{-A(t)}(1-\alpha)h(x)\,\mathrm{d}t = 1\cdot\cos(x) + \cos(x)\cdot\int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\cdot\frac{1}{2}\tan(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(x)\cdot\left[\frac{1}{\cos(t)}\right]_{t=0}^{t=x} = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(x)\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos(x)\right).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung y als

$$y(x) = (z(x))^2 = \frac{1}{4}\left(1+\cos(x)\right)^2, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Bemerkung: Beachten Sie, dass wir keine eindeutige Aussage über dieses Intervall hinaus machen können! Wie im Beispiel Aufgabe 1 Teil (ii) auf Tutoriumsblatt 1 könnten wir diese Lösung ab $\frac{\pi}{2}$ sowohl mit 0 als auch mit der obigen Funktionsvorschrift fortsetzen. Beides mal erhalten wir eine C^1-Lösung des Anfangswertproblems. Das Problem ist hier wieder die unbeschränkte Steigung von $\sqrt{y}$, wenn y den Funktionswert 0 annimmt.

(ii) Wir schreiben die Differentialgleichung um zu

$$0 = y' + \frac{1}{x}y - \frac{5}{3}x\,y^{-2} = y' + g(x)y + h(x)y^{\alpha}$$

mit $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{x}$, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := -\frac{5}{3}x$ und $\alpha := -2$. Diese Funktionen sind stetig auf ihren Definitionsbereichen als Quotienten von Polynomen. Es handelt sich also wieder um eine Bernoulli-Differentialgleichung. Wie zuvor multiplizieren wir die Differentialgleichung mit $(1-\alpha)y^{-\alpha} = 3y^2$ und setzen $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^3$ und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= (1-\alpha)y'y^{-\alpha} + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) \\
&= \left(y^{1-\alpha}\right)' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) \\
&= z' + (1-\alpha)g(x)z + (1-\alpha)h(x) \\
&= z' + \frac{3}{x}z - 5x.
\end{aligned}$$

Der Anfangswert ändert sich zu

$$z(1) = z(x_0) = y(x_0)^3 = 1^3 = 1.$$

Wir lösen das Anfangwertproblem in z mit der "Variation der Konstanten"-Formel. Hierzu berechnen wir zu erst für $x \in (0,\infty)$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} -(1-\alpha)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x -\frac{3}{t}\,\mathrm{d}t = -3\ln(x) + 3\ln(1) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Damit erhalten wir die $z(x)$ für $x \in (0,\infty)$ durch

$$\begin{aligned}
z(x) &= z_0 \mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int_{x_0}^{x} -\mathrm{e}^{-A(t)}(1-\alpha)h(t)\,\mathrm{d}t = 1 \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \cdot \int_1^x -3t^3 \cdot \frac{-5}{3}t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \cdot \int_1^x 5t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \cdot \left(x^5 - 1\right) \\
&= x^2.
\end{aligned}$$

Rücksubstituieren liefert uns die Lösung y des Anfangswertproblems $y' = a(x)y + b(y)$ mit $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = \sqrt[3]{z(x)} = x^{\frac{2}{3}}, \qquad \text{für } \; x \in (0,\infty).$$

Bemerkung: Wir können Definitionsbereich mit folgenden Ideen vergrößern: Statt $y' = a(x)y + b(x)$ zu verlangen (a ist für $x \le 0$ nicht wohldefiniert), multiplizieren wir die Gleichung mit $3xy^2$, d.h. wir verlangen wir $3y^3 - 5x^2 + 3xy^2y' = 0$. Hier kann $x \le 0$ problemlos eingesetzt werden. Unsere gefundene Lösung $y(x) = x^{\frac{2}{3}} = |x|^{\frac{2}{3}}$ lässt sich auf $J = \mathbb{R}$ fortsetzen und direktes Einsetzen liefert, dass y die ursprüngliche Differenzialgleichung in ganz $J \setminus \{0\}$ erfüllt. Beachten Sie, dass y nicht in 0 differenzierbar ist, sich aber $3y^3$, $5x^2$ und $3xy^2y'$ stetig in 0 fortsetzen lassen.

Aufgabe 3:
Wir betrachten einen leeren Kondensator mit Kapazität C und legen zum Zeitpunkt $t = 0$ die konstante Spannung U an. Dabei ist ein Widerstand mit R in Reihe geschaltet. Die aktuelle Ladung $Q(t)$ des Kondensators erfüllt die Differentialgleichung

$$Q'(t) + \frac{1}{RC}Q(t) - \frac{U}{R} = 0.$$

(i) Bestimmen Sie die aktuelle Ladung $Q(t)$ des Kondensators als Funktion der Zeit.

(ii) Zu welchem Zeitpunkt ist der Kondensator zu 90% aufgeladen?

(iii) Wir nehmen nun an, dass die anglegte Spannung nicht konstant ist, sondern betrachten $U(t) = U_0 \sin(t)$. Zur einfacherern Rechnung nehmen wir zusätzlich $R = \frac{1}{C}$ an. Bestimmen Sie die Lösung $Q(t)$ von

$$Q'(t) + Q(t) - CU_0 \sin(t) = 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Wir gehen zur Startzeit $t_0 \coloneqq 0$ von einem leeren Kondensator aus, d.h. in allen Aufgabenteilen nehmen nutzen wir den Startwert $Q(t_0) = 0 =: Q_0$.

(i) Wir nutzen zum Lösen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} Q' = a(t)Q + b(t), \\ Q(t_0) = Q_0, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad a(t) = -\frac{1}{RC}, \quad b(t) = \frac{U}{R}, \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

die "Variation der Konstanten"-Formel. Dafür berechnen wir

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t -\frac{1}{RC}\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{RC}t, \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Dann lautet die Lösung Q des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 \mathrm{e}^{A(t)} + \mathrm{e}^{A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s \\ &= 0 \cdot \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) + \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{RC}s\right) \cdot \frac{-U}{R}\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{U}{R}\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \cdot RC \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{RC}t\right) - 1\right) = UC \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)\right). \end{aligned}$$

(ii) Die maximale Ladung Q_{max} des Kondensators ist $Q_{max} = UC$. Wir lösen also auf, zu welchem Zeitpunkt $T > 0$ gilt: $Q(T) = \frac{9}{10} Q_{max}$.

$$\begin{aligned} Q(T) = \frac{9}{10}Q_{max} \quad &\Leftrightarrow \quad UC \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{RC}T\right)\right) = \frac{9}{10}UC \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \exp\left(-\frac{1}{RC}T\right) = \frac{9}{10} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{RC}T = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \quad \Leftrightarrow \quad T = RC \cdot \ln(10). \end{aligned}$$

(iii) Wir nutzen zum Lösen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} Q' = a(t)Q + \tilde{b}(t), \\ Q(t_0) = Q_0, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad a(t) = -1, \quad \tilde{b}(t) = CU_0 \sin(t), \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

die "Variation der Konstanten"-Formel. Wie in Teil (i) gilt $A(t) = -t$. Dann lautet die Lösung Q des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 \mathrm{e}^{A(t)} + \mathrm{e}^{A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} \tilde{b}(s)\,\mathrm{d}s = 0 \cdot \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \mathrm{e}^{s} \cdot CU_0 \sin(s)\,\mathrm{d}s \\ &= CU_0 \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \mathrm{e}^{s} \sin(s)\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von $f(s) \coloneqq \mathrm{e}^s \sin(s)$ lässt sich durch zweifache partielle Integration bestimmen:

$$\begin{aligned} \int f(s)\,\mathrm{d}s &= \int \mathrm{e}^s \sin(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^s \sin(s) - \int \mathrm{e}^s \cos(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^s \sin(s) - \mathrm{e}^s \cos(s) + \int \mathrm{e}^s \cdot (-\sin(s))\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^s \sin(s) - \mathrm{e}^s \cos(s) - \int f(s)\,\mathrm{d}s \\ &\Rightarrow \quad \int f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\mathrm{e}^s\left(\sin(s) - \cos(s)\right). \end{aligned}$$

Damit beenden wir die oben begonnene Rechnung:

$$\begin{aligned} Q(t) &= CU_0 \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \mathrm{e}^s \sin(s) \,\mathrm{d}s = CU_0 \mathrm{e}^{-t} \cdot \frac{1}{2} \big(\mathrm{e}^t (\sin(t) - \cos(t)) - \mathrm{e}^0 (\sin(0) - \cos(0)) \big) \\ &= \frac{CU_0}{2} (\sin(t) - \cos(t)) + \frac{CU_0}{2} \mathrm{e}^{-t} = \frac{CU_0}{2} \mathrm{e}^{-t} + \frac{CU_0}{\sqrt{2}} \sin\Big(t - \frac{\pi}{4}\Big). \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir erkennen in $\frac{CU_0}{2}\mathrm{e}^{-t}$ einen abklingenden Versatz, hervorgerufen durch den Fakt, dass wir mit einem leeren Kondensator begonnen haben, und in $\frac{CU_0}{\sqrt{2}} \sin\big(t - \frac{\pi}{4}\big)$, dass die Kondensatorladung der angelegten Spannung um eine viertel Periode verschoben folgt.