Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 18. November 2020 bis 24. November 2020

Aufgabe 4:
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit der Methode der "Trennung der Veränderlichen" und geben Sie geeignete Definitionsbereiche für die Lösungen an.

(i) $y' = \frac{x}{y}$, $y(0) = 1$.

(ii) $y' = \sqrt{1-y^2}\cos(x)$, $y(0) = 0$. *Hinweis:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ für $t \in (-1,1)$.

Aufgabe 5:
Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem 2ter Ordnung:

$$(*)\begin{cases} y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 4. \end{cases}$$

(i) Verifizieren Sie, dass die Funktion $z(x) := x$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist.

(ii) Nutzen Sie die Methode von d'Alembert, um eine weitere Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu finden.

(iii) Finden Sie mit dem Ansatz $y_p(x) = \beta \cdot x^\alpha$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.
Motivation für diesen Ansatz: Wir beobachten in der Differentialgleichung: Jeder Term der linken Seite der Differentialgleichung ist von der Form $\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2-\alpha} y$. Ableitungen und Divisionen durch x halten sich also in Waage, so wie wir es von Polynomen kennen. Rechts steht ein Polynom nullter Ordnung.

(iv) Lösen Sie das Anfangswerproblem $(*)$.