Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 18. November 2020 bis 24. November 2020

Aufgabe 4:
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit der Methode der "Trennung der Veränderlichen" und geben Sie geeignete Definitionsbereiche für die Lösungen an.

(i) $y' = \frac{x}{y}$, $y(0) = 1$.

(ii) $y' = \sqrt{1-y^2}\cos(x)$, $y(0) = 0$. *Hinweis:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ für $t \in (-1, 1)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Wir stellen in dieser Aufgabe zwei Varianten der "Trennung der Veränderlichen" vor. Die erste Variante ist eine direkte Anwendung der Formel der Vorlesung. Die zweite Variante entspricht einer formalen Rechnung, in der nicht jedes Symbol mathematisch exakt definiert ist, jedoch ist die Methode sehr einfach zu merken und führt auf die richtige Lösung.

(i) Wir schreiben $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) := \frac{1}{y}$, $x_0 := 0$ und $y_0 := 1$. Damit hat unser betrachtetes Anfangswertproblem die Form

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Wir bestimmen nun Stammfunktionen von f und $\frac{1}{g}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &\overset{!}{=} f(x) = x && \Leftrightarrow && F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_f \quad \text{für ein } c_f \in \mathbb{R}, \\ G'(y) &\overset{!}{=} \frac{1}{g(y)} = y && \Leftrightarrow && G(y) = \frac{1}{2}y^2 + c_g \quad \text{für ein } c_g \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir wählen willkürlich $c_f := c_g := 0$ (jede andere Wahl ist hier ebenfalls möglich). Weiter ist G auf $(0,\infty)$ invertierbar mit $G^{-1}(y) = \sqrt{2y}$. Damit erhalten wir mit der Formel aus der Vorlesung die Lösung des Anfangswertproblems durch:

$$y(x) = G^{-1}\left(F(x) - F(x_0) + G(y_0)\right) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{2}1^2\right)} = \sqrt{1+x^2}.$$

Die Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon y(x) := \sqrt{1+x^2}$ ist wohldefiniert und löst auf ganz $\mathbb{R}$ das Anfangswertproblem.

(ii) Wir schreiben die Ableitung formal als $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und sortieren alle Terme mit y nach links und alle Terme mit x nach rechts. Danach integrieren wir die neue Gleichung vom Startwert $(x_0, y_0) = (0,0)$ bis zum Punkt (x, y).

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1-y^2}\cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \cos(x)\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s = \int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin(y) - 0 = \sin(x) - 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sin(\sin(x)). \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass dies eine formale Rechnung war, d.h. sie ist mathematisch nicht rigoros gerechtfertigt. Jedoch ergibt sie das richtige Ergebnis, wie einsetzen in das AWP bestätigt! Formal korrekt ist die Variante der Vorlesung: Wir sortieren alle Terme mit y nach links und alle Terme mit x nach rechts, danach integrieren wir die Differentialgleichung von x_0 bis x und substituieren $\eta = y(t)$.

$$\begin{aligned}
& y'(x) = \sqrt{1-y(x)^2}\cos(x),\ y(x_0) = y_0 && \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-y(x)^2}}y'(x) = \cos(x),\ y(x_0) = y_0 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-y(t)^2}}y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x}\cos(t)\,\mathrm{d}t && \Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} = \sin(x) - \sin(x_0) \\
\Leftrightarrow \quad & \arcsin(y(x)) - 0 = \sin(x) - 0 && \Leftrightarrow \quad y(x) = \sin(\sin(x)).
\end{aligned}$$

Diese Rechnung ist nur erlaubt, solange $|y(x)| < 1$. Die Vorschrift $y(x) = \sin(\sin(x))$ liefert eine Funktion mit $|y(x)| \leq \sin(1) < 1$, somit kann die Rechnung immer gemacht werden. Also: Die Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon y(x) \coloneqq \sin(\sin(x))$ ist wohldefiniert und löst auf ganz $\mathbb{R}$ das Anfangswertproblem.

Aufgabe 5:
Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem 2ter Ordnung:

$$(*)\begin{cases} y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 4. \end{cases}$$

(i) Verifizieren Sie, dass die Funktion $z(x) \coloneqq x$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist.

(ii) Nutzen Sie die Methode von d'Alembert, um eine weitere Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu finden.

(iii) Finden Sie mit dem Ansatz $y_p(x) = \beta \cdot x^\alpha$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.
Motivation für diesen Ansatz: Wir beobachten in der Differentialgleichung: Jeder Term der linken Seite der Differentialgleichung ist von der Form $\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2-\alpha} y$. Ableitungen und Divisionen durch x halten sich also in Waage, so wie wir es von Polynomen kennen. Rechts steht ein Polynom nullter Ordnung.

(iv) Lösen Sie das Anfangswerproblem $(*)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Wir schreiben $x_0 \coloneqq 1$. Die zum AWP gehörige homogene Differentialgleichung lautet: $y_h'' - \frac{1}{x}y_h' + \frac{1}{x^2}y_h = 0$.

(i) Wir setzen $z(x) = x$ in die homogene Differentialgleichung ein und erhalten für $x > 0$:

$$z''(x) - \frac{1}{x}z'(x) + \frac{1}{x^2}z(x) = 0 - \frac{1}{x}\cdot 1 + \frac{1}{x^2}\cdot x = 0.$$

Also erfüllt z die homogene Differntialgleichung.
Motivation für z: $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = y'' - \frac{1}{x^2}(xy' - y)$, d.h. ein Polynom z von Grad 1 (also $z'' \equiv 0$) mit $xz' - z \equiv 0$ löst die homogene Differentialgleichung.

(ii) Die Methode von d'Alembert nutzt den Ansatz $w(x) = v(x)z(x)$ mit einer noch zu bestimmenden Funktion v, um eine weitere Lösung w der homogenen Differentialgleichung zu finden. Wir setzen w in die Differentialgleichung ein, nutzen, dass z die homogene Differentialgleichung löst, und leiten eine Gleichung für v her. Wir betrachten im Folgenden immer $x \in (0,\infty)$.

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} w'' - \frac{1}{x}w' + \frac{1}{x^2}w = (v''z + 2v'z' + vz'') - \frac{1}{x}(v'z + vz') + \frac{1}{x^2}vz \\
&= v \cdot \underbrace{\left(z'' - \frac{1}{x}z' + \frac{1}{x^2}z\right)}_{=0} + v''z + v'\cdot\left(2z' - \frac{1}{x}z\right) \\
\Leftrightarrow \qquad 0 &= v'' + v'\cdot\left(\frac{2z'}{z} - \frac{1}{x}\right) = v'' + v'\cdot\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung in v', die wir direkt lösen können. Eine Stammfunktion von $-\frac{1}{x}$ lautet $-\ln(x)$. Damit erhalten wir für $x > 0$:

$$\begin{aligned} 0 = v'' + v' \cdot \frac{1}{x} \qquad &\Leftrightarrow \qquad v'(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{c_1}{x} \qquad && \text{für } c_1 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \qquad v(x) = c_1 \ln(x) + c_2 && \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir wählen (fast) willkürlich $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$. Damit ist eine weitere Lösung w der homogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$w(x) = v(x)z(x) = \ln(x) \cdot x, \qquad x \in (0, \infty).$$

Beachten Sie, dass wir durch $c_1 = 0$ nur ein Vielfaches von z bekommen hätten, also keine neue (d.h. linear unabhängige) Lösung.

(iii) Wir setzen den Ansatz $y_p(x) = \beta \cdot x^\alpha$ in die Differentialgleichung ein. Für $x > 0$ muss also gelten:

$$1 \overset{!}{=} y_p'' - \frac{1}{x} y_p' + \frac{1}{x^2} y_p = \beta\alpha\left(\alpha - 1\right) x^{\alpha-2} - \frac{1}{x}\beta\alpha x^{\alpha-1} + \frac{1}{x^2}\beta x^\alpha = \beta \cdot \left(\alpha - 1\right)^2 \cdot x^{\alpha-2}.$$

Damit lesen wir zu erst $\alpha = 2$ ab (andernfalls wäre die linke Seite konstant in x aber die rechte Seite nicht). Wir finden β als $\beta = \frac{1}{(\alpha-1)^2} = 1$. Eine spezielle Lösung y_p der Differentialgleichung lautet also $y_p(x) = x^2$.

(iv) Wir wissen aus der Vorlesung, dass sich jede Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ als Summe von einer Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung darstellen lässt. Wir nutzen unser Fundamentalsystem aus Teil (i) und (ii) und die spezielle Lösung y_p aus Teil (iii). Damit existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so dass für die Lösung y des AWP gilt:

$$y(x) = c_1 z(x) + c_2 w(x) + y_p(x).$$

Damit ist die Differentialgleichung erfüllt. Zu Bestimmung von c_1 und c_2 nutzen wir die Anfangswerte. Es gilt:

$$\begin{array}{llllll} z(x) = x & \Rightarrow & z'(x) = 1 & \Rightarrow & z(x_0) = z(1) = 1, & z'(x_0) = z'(1) = 1, \\ w(x) = x\ln(x) & \Rightarrow & w'(x) = 1 + \ln(x) & \Rightarrow & w(x_0) = z(1) = 0, & z'(x_0) = z'(1) = 1. \\ y_p(x) = x^2 & \Rightarrow & y_p'(x) = 2x & \Rightarrow & y_p(x_0) = y_p(1) = 1, & y_p'(x_0) = y_p'(1) = 2. \end{array}$$

Damit rechnen wir

$$\left.\begin{aligned} 2 &\overset{!}{=} y(x_0) = c_1 z(x_0) + c_2 w(x_0) + y_p(x_0) &&= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + 1 = c_1 + 1, \\ 4 &\overset{!}{=} y'(x_0) = c_1 z'(x_0) + c_2 w'(x_0) + y_p'(x_0) &&= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + 2 = c_1 + c_2 + 2, \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= 1, \\ c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ lautet also

$$y(x) = c_1 z(x) + c_2 w(x) + y_p(x) = 1 \cdot x + 1 \cdot x\ln(x) + x^2 = x + x\ln(x) + x^2, \qquad \text{für } x > 0.$$