Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 25. November 2020 bis 1. Dezember 2020

Aufgabe 6:
Wir betrachten in dieser Aufgabe Beispiele der Methode der "Trennung der Variablen", falls die rechte Seite eine Nullstelle im Anfangswert $g(y_0) = 0$ hat. Sei hierzu für $\alpha > 0$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y^\alpha, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

gegeben, wobei wir nur Funktionen $y(x) \geq 0$ betrachten. Offensichtlich ist $y(x) \equiv 0$ eine Lösung des AWP auf $[0, \infty)$. Wir versuchen nun eine weitere Lösung zu finden.

Frage: Für welche $\alpha > 0$ liefert die Methode der "Trennung der Variablen" eine weitere Lösung?

Fazit: Im Fall $g(y_0) = 0$ ist die konstante Funktion $y(x) = y_0$ immer eine Lösung des AWP und der Ansatz zur Trennung der Variablen kann – aber muss nicht – eine weitere Lösung produzieren.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:
Wir schreiben $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1$, $g\colon [0, \infty)$, $g(y) := y^\alpha$, $x_0 := 0$ und $y_0 := 0$. Damit müssen in der Formel zur "Trennung der Variablen"

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(\eta)} \, \mathrm{d}\eta = \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t$$

beide Integrale existieren und die Gleichung nach $y(x)$ auflösbar sein. Wir berechnen beide Seiten einzeln:

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(\eta)} \, \mathrm{d}\eta &= \lim_{y \searrow 0} \int_{y}^{y(x)} \eta^{-\alpha} \, \mathrm{d}\eta = \lim_{y \searrow 0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \left(y(x)^{1-\alpha} - y^{1-\alpha} \right), & \alpha \neq 1, \\ \ln(y(x)) - \ln(y), & \alpha = 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} y(x)^{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1, \end{cases} \\
\int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^x 1 \, \mathrm{d}t = x.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $\alpha < 1$ ist also notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Integrals. Wir lösen damit für $\alpha \in (0, 1)$, $x > 0$ auf:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(\eta)} \, \mathrm{d}\eta = \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} y(x)^{1-\alpha} = x \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = ((1-\alpha)x)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Durch Einsetzen sehen wir: diese Funktion löst das AWP auf $[0, \infty)$.

Aufgabe 7:

(i) Geben Sie jeweils ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung an.

(a) $y'' + 2y' - 15y = 0$.

(b) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

(ii) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit konstanten Koeffizienten.

(a) $y'' - y' - 2y = 10\sin(x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

(b) $y'' + 4y = 4\sin(2x), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) Wir setzen jeweils den Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in die homogene Differentialgleichung ein, um das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung zu erhalten.

(a) Mit dem Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ ergibt sich

$$0 \overset{!}{=} y'' + 2y' - 15y = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(\lambda^2 + 2\lambda - 15\right).$$

Das charakteristische Polynom lautet also

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda + 5).$$

Diese Faktorisierung erhalten Sie zum Beispiel durch die pq-Formel oder den Satz von Vieta (Vieta: x_1, x_2 lösen $x^2 + ax + b = 0$, dann gilt $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = b$). Eine Nullstelle raten und die Zweite durch Polynomdivision berechnen wäre eine weitere Möglichkeit. Damit lautet ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $\{y_1, y_2\}$ mit

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{3x}, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{-5x}.$$

(b) Mit dem Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ ergibt sich

$$0 \overset{!}{=} y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1\right).$$

Das charakteristische Polynom lautet also

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2\right)^2 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 = (\lambda + \mathrm{i})^2 (\lambda - \mathrm{i})^2.$$

Für die Faktorisierung haben wir das Polynom zu erst als Polynom in λ^2 geschrieben, dessen Nullstellen mit der ersten binomischen Formel bestimmt und danach zwei mal die dritte binomische Formel mit komplexen Koeffizienten benutzt. Damit sind i und $-\mathrm{i}$ jeweils eine doppelte Nullstelle. Somit lautet ein komplexes Fundamentalsystem der Differentialgleichung $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ mit

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \qquad y_2(x) = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \qquad y_3(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}, \qquad y_4(x) = x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}.$$

Durch den Realteil und Imaginärteil des komplexen Fundamentalsystems erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ mit

$$z_1(x) = \cos(x), \qquad z_2(x) = x\cos(x), \qquad z_3(x) = \sin(x), \qquad z_4(x) = x\sin(x).$$

Bemerkung: Wenn Ihnen die Formulierung "Realteil und Imaginärteil nehmen" nicht gefällt, so können Sie die Operation auch als "Basiswechsel durch Rekombination" der bisherigen Basiselemente verstehen. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \\ z_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\mathrm{i}} & 0 & -\frac{1}{2\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\mathrm{i}} & 0 & -\frac{1}{2\mathrm{i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix}$$

(ii) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit konstanten Koeffizienten.

(a) Wir bestimmen zu erst ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $y_h'' - y_h' - 2y = 0$. Wie in Teil (i) erhalten wir das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Damit lautet ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $\{y_1, y_2\}$ mit

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Die rechte Seite ist von der Form $f(x) = 10\sin(x) = q(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x)$ mit $q(x) = 10$, $\sigma = 0$, $\omega = 1$. Die Zahl $\sigma + \mathrm{i}\omega = \mathrm{i}$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Deshalb machen wir den Ansatz $y_p(x) = r\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) + s\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x)$ mit Polynomen r, s vom selben Grad wie q, also Grad 0. Damit hat unser Ansatz y_p die Gestalt $y_p(x) = r\sin(x) + s\cos(x)$. Wir setzen diesen in die Differentialgleichung ein und bestimmen die noch freien Parameter r und s.

$$\begin{aligned} 10\sin(x) &\overset{!}{=} y_p'' - y_p' - 2y_p \\ &= (-r\sin(x) - s\cos(x)) - (r\cos(x) - s\sin(x)) - 2\,(r\sin(x) + s\cos(x)) \\ &= (-3r + s)\sin(x) + (-3s - r)\cos(x). \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} -3r + s = 10 \\ -3s - r = 0 \end{matrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)\cdot(-3) - 1\cdot(-1)}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist $y_p(x) = -3\sin(x) + \cos(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Unsere gesuchte Lösung y des AWP hat also die Gestalt

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{2x} - 3\sin(x) + \cos(x),$$

wobei wir c_1 und c_2 mit den Anfangswerten bestimmen. Es muss gelten

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} 1 \overset{!}{=} y(0) = c_1 + c_2 + 1 \\ 0 \overset{!}{=} y'(0) = -c_1 + 2c_2 - 3 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1\cdot 2 - 1\cdot(-1)}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit lautet die Lösung des AWP

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x} - 3\sin(x) + \cos(x).$$

(b) Wir bestimmen zu erst ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $y_h'' + 4y_h = 0$. Wie in Teil (i) erhalten wir das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2\mathrm{i})(\lambda - 2\mathrm{i}).$$

Damit lautet ein reelles Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $\{y_1, y_2\}$ mit

$$y_1(x) = \sin(2x), \qquad y_2(x) = \cos(2x).$$

Die rechte Seite ist von der Form $f(x) = 4\sin(2x) = q(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x)$ mit $q(x) = 4$, $\sigma = 0$, $\omega = 2$. Die Zahl $\sigma + \mathrm{i}\omega = 2\mathrm{i}$ ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Deshalb machen wir den Ansatz $y_p(x) = x \cdot (r\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) + s\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x))$ mit Polynomen r, s vom selben Grad wie q, also Grad 0. Damit hat unser Ansatz y_p die Gestalt $y_p(x) = rx\sin(2x) + sx\cos(2x)$. Wir setzen dies in die Differentialgleichung ein und bestimmen die noch freien Parameter r und s.

$$\begin{aligned} 4\sin(x) &\overset{!}{=} y_p'' + 4y_p \\ &= (-4rx\sin(2x) - 4sx\cos(2x) - 4s\sin(2x) + 4r\cos(2x)) + 4\,(rx\sin(2x) + sx\cos(2x)) \\ &= -4s\sin(2x) + 4r\cos(2x). \end{aligned}$$

Hier sehen wir sehr gut, warum der Faktor x (einfache Nullstelle) hinzugefügt wurde. Damit diese Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, muss gelten:

$$-4s = 4 \text{ und } 4r = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad s = -1 \text{ und } r = 0.$$

Damit ist $y_p(x) = -x\cos(2x)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Unsere gesuchte Lösung y des AWP hat also die Gestalt

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) - x\cos(2x),$$

wobei wir c_1 und c_2 mit den Anfangswerten bestimmen. Es muss gelten

$$2 \overset{!}{=} y(0) = c_2 \text{ und } -1 \overset{!}{=} y'(0) = 2c_1 - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_1 = 0 \text{ und } c_2 = 2.$$

Somit lautet die Lösung des AWP

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) = 2\cos(2x) - x\cos(2x).$$