Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 2. Dezember 2020 bis 8. Dezember 2020

Aufgabe 8:
Bestimmen Sie jeweils ein Fundamentalsystem der folgenden Eulerschen Differentialgleichungen:

(i) $x^3y''' + xy' + 7y = 0$.

(ii) $x^2y'' + 2xy' - \frac{3}{4}y = 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:
Für $x > 0$ schreiben wir $x = \mathrm{e}^t$ und substituieren $y(x) = u(\ln(x))$, d.h. $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$. Wir rechnen die ersten drei Ableitungen aus.

$$\begin{aligned}
u'(t) &= y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t = y'(x)x,\\
u''(t) &= y''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t} + y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t = y''(x)x^2 + y'(x)x,\\
u'''(t) &= y'''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{3t} + 3y''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t} + y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t = y'''(x)x^3 + 3y''(x)x^2 + y'(x)x.
\end{aligned}$$

Diese Regeln können wir auch formal schreiben als:

$$u(t) = y(x), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$
$$\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3 + 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}.$$

Wir lösen nach den höchsten Ableitungen in y auf und ersetzen die niedrigeren Ableitungen in y mit Ableitungen in u. Damit erhalten wir:

$$y'(x)x = u'(t), \qquad y''(x)x^2 = u''(t) - u'(t), \qquad y'''(x)x^3 = u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t).$$

Dieses Ergebnis der Substitution $x = \mathrm{e}^t$ haben wir schon in der Vorlesung unabhängig von der Differentialgleichung hergeleitet und werden dies in beiden Teilaufgaben nutzen.

(i) Wir schreiben $x = \mathrm{e}^t$ und $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$. Mit den Rechnungen zuvor erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= y'''(x)x^3 + y'(x)x + 7y(x) = (u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)) + u'(t) + 7u(t)\\
&= u'''(t) - 3u''(t) + 3u'(t) + 7u(t).
\end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ lesen wir das charakteristische Polynom ab:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 7 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 7) = (\lambda + 1)(\lambda - 2 + \sqrt{3}\mathrm{i})(\lambda - 2 - \sqrt{3}\mathrm{i}).$$

Die Nullstelle $\lambda = -1$ ist leicht zu erraten. Mit Polynomdivision kann diese dann ausgeklammert werden. Die verbleibenden zwei Nullstellen finden wir zum Beispiel durch die pq-Formel. Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung in u lautet $\{u_1, u_2, u_3\}$ mit

$$u_1(t) := \mathrm{e}^{-t}, \qquad u_2(t) := \mathrm{e}^{2t}\sin\left(\sqrt{3}t\right), \qquad u_3(t) := \mathrm{e}^{2t}\cos\left(\sqrt{3}t\right).$$

Wir setzen $y_i(x) := u_i(\ln(x))$, d.h.

$$y_1(x) = \frac{1}{x}, \qquad y_2(x) = x^2\sin\left(\sqrt{3}\ln(x)\right), \qquad y_2(x) = x^3\cos\left(\sqrt{3}\ln(x)\right).$$

Damit ist $\{y_1, y_2, y_3\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (i).

(ii) Wir schreiben $x = \mathrm{e}^t$ und $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$. Mit den Rechnungen zuvor erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x)x^2 + 2y'(x)x - \frac{3}{4}y(x) = (u''(t) - u'(t)) + 2u'(t) - \frac{3}{4}u(t) \\ &= u''(t) + u'(t) - \frac{3}{4}u(t) \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ lesen wir das charakteristische Polynom ab:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4} = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right).$$

Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung in u lautet also $\{u_1, u_2\}$ mit

$$u_1(t) := \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}, \qquad u_2(t) := \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}.$$

Wir setzen $y_i(x) := u_i(\ln(x))$, d.h.

$$y_1(x) = x^{-\frac{3}{2}}, \qquad y_2(x) = \sqrt{x}.$$

Damit ist $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (ii).

Aufgabe 9:

(i) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - 4y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Nutzen Sie einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$ und bestimmen Sie die ersten fünf Koeffizienten $y_0, y_1, \ldots, y_4$ der Lösung.

(ii) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' + y' + \frac{y}{1-x} = \frac{x}{1-x}, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Nutzen Sie einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$ und bestimmen Sie die ersten fünf Koeffizienten $y_0, y_1, \ldots, y_4$ der Lösung.
Hinweis (Geometrische Reihe): Für $s \in [-1, 1)$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9:
Wir nehmen an, die Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$ konvergiert für $|x| < R$. Dann ist y auf dieser Scheibe glatt und es gilt für $|x| < R$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, y_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y_{n+1} x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, y_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) y_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

(i) Wir setzen den Potenzreihenansatz in die Differentialgleichung ein, ziehen die Summen zusammen und erhalten für $|x| < R$:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) y_{n+2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2) y_{n+2} - 4 y_n\right) x^n.$$

Damit diese Gleichung für alle $|x| < R$ erfüllt ist, muss gelten:

$$\forall\, n = 0, \ldots, \infty: \qquad 0 = (n+1)(n+2)y_{n+2} - 4y_n.$$

Damit erhalten wir die Rekursion:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0: \qquad y_{n+2} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} y_n.$$

Mit den Anfangswerten können wir die ersten beiden Koeffizienten bestimmen:

$$1 \overset{!}{=} y(0) = y_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_0 0^n = y_0, \qquad 2 \overset{!}{=} y'(0) = y_1 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) y_{n+1} 0^n = y_1.$$

Damit erhalten wir die ersten fünf Koeffizienten:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, & y_1 &= 2, \\ y_2 &= \frac{4 \cdot y_0}{(0+1)(0+2)} = 2, & y_3 &= \frac{4 \cdot y_1}{(1+1)(1+2)} = \frac{4}{3}, \\ y_4 &= \frac{4 \cdot y_2}{(2+1)(2+2)} = \frac{2}{3}, & &\text{und so weiter.} \end{aligned}$$

Eine gute Näherung um die Lösung y des AWP um $x = 0$ ist also gegeben durch:

$$y(x) \approx \sum_{n=0}^{4} y_n x^n = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4.$$

Zusatz: In diesem Beispiel können wir die Potenzreihe auch exakt ausrechnen. Eine Induktion zeigt: $y_n = \frac{1}{n!}2^n$. Also: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^n x^n = \mathrm{e}^{2x}$.

(ii) Die Potenzreihe von $q(x) := \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$ ist gegeben durch die Geometrische Reihe:

$$q(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \qquad \text{mit} \quad q_n := 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Multiplikation von y mit q rechnen wir mit dem Cauchy-Produkt für Reihen für $|x| < 1$:

$$\frac{y(x)}{1-x} = y(x) \cdot q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} y_k q_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} y_k \right) x^n.$$

Die Potenzreihe von $f(x) := \frac{x}{1-x}$ für $|x| < 1$ ergibt sich leicht aus der geometrischen Reihe:

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \qquad \text{mit} \quad f_0 := 0, \quad f_n := 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Alle Potenzreihen setzen wir nun in die Differentialgleichung ein und erhalten für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} y''(x) + y'(x) + \frac{y(x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} = y''(x) + y'(x) + y(x)q(x) - f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)y_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)y_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} y_k \right) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2)y_{n+2} + (n+1)y_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} y_k - f_n \right) x^n. \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung für alle $|x| < 1$ erfüllt ist, müssen alle Koeffizienten 0 sein. Wir erhalten also für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Vorschrift:

$$\begin{aligned} & 0 \overset{!}{=} (n+1)(n+2)y_{n+2} + (n+1)y_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} y_k - f_n \\ \Leftrightarrow \qquad & y_{n+2} = \frac{-(n+1)y_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} y_k + f_n}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Mit den Anfangswerten können wir die ersten beiden Koeffizienten bestimmen:

$$-1 \overset{!}{=} y(0) = y_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_0 0^n = y_0, \qquad 0 \overset{!}{=} y'(0) = y_1 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) y_{n+1} 0^n = y_1.$$

Damit erhalten wir die ersten fünf Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
y_0 &= -1, \\
y_1 &= 0, \\
y_2 &= \frac{-(0+1)y_{0+1} - \sum_{k=0}^{0} y_k + f_0}{(0+1)(0+2)} = \frac{-0+1+0}{2} = \frac{1}{2}, \\
y_3 &= \frac{-(1+1)y_{1+1} - \sum_{k=0}^{1} y_k + f_1}{(1+1)(1+2)} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2} - (0-1) + 1}{6} = \frac{1}{6}, \\
y_4 &= \frac{-(2+1)y_{2+1} - \sum_{k=0}^{2} y_k + f_2}{(2+1)(2+2)} = \frac{-3 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} + 0 - 1\right) + 1}{12} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Eine gute Näherung um die Lösung y des AWP um $x = 0$ ist also gegeben durch:

$$y(x) \approx \sum_{n=0}^{4} y_n x^n = -1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4.$$

Zusatz: In diesem Beispiel könnten wir die Potenzreihe auch exakt ausrechnen. Eine Induktion bestätigt: $y_n = \frac{1}{n(n-1)}$. Also: $y(x) = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n = (1-x) \cdot (\ln(1-x) - 1)$. Die Formeln für die Induktion und das letzte "=" benötigen viel Rechnung!