Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 9. Dezember 2020 bis 15. Dezember 2020

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie mit dem abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = x^\rho \cdot \sum_{n=0}^\infty c_n x^n$ eine Lösung y_1 der Differntialgleichung

$$x^2 y'' + 3xy' + (1 - x - x^2)y = 0.$$

Nutzen Sie dann wie im Satz der Vorlesung den Ansatz $y_2(x) = \ln(x) y_1(x) + x^\rho \cdot \sum_{n=0}^\infty d_n x^n$ mit $d_0 \coloneqq 0$ und bestimmen Sie die nächsten 4 Koeffizienten $d_1, \dots, d_4$ mit c_0 als Parameter.

Aufgabe 11:
Für eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, definieren wir den Laplace-Operators in kartesischen Koordinaten

$$\Delta u \coloneqq \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Wir suchen in dieser Aufgabe Lösungen $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von $-\Delta u = \lambda u$ für ein $\lambda > 0$, wobei u eine radialsymmetrische Funktion ist, d.h. wir können $u(x) = v(r)$ für $r \coloneqq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ und eine Funktion $v\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ schreiben.

(i) Zeigen Sie: $\Delta u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$.

(ii) Führen Sie die Transformation $v(r) = r^{-\alpha} w(r)$ durch. Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass w eine Lösung von $r^2 w''(r) + r w'(r) + \left(\lambda r^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right) w(r) = 0$ ist.

(iii) Führen Sie die Transformation $w(r) = z(\beta \cdot r)$ durch. Finden Sie $\beta > 0$ so, dass z eine Besselsche Differentialgleichung löst.