Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 9. Dezember 2020 bis 15. Dezember 2020

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie mit dem abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = x^\rho \cdot \sum_{n=0}^\infty c_n x^n$ eine Lösung y_1 der Differntialgleichung

$$x^2 y'' + 3xy' + (1 - x - x^2)y = 0.$$

Nutzen Sie dann wie im Satz der Vorlesung den Ansatz $y_2(x) = \ln(x) y_1(x) + x^\rho \cdot \sum_{n=0}^\infty d_n x^n$ mit $d_0 := 0$ und bestimmen Sie die nächsten 4 Koeffizienten $d_1, \dots, d_4$ mit c_0 als Parameter.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10:
Wir nehmen an, die abgewandelte Potenzreihe $y(x) = x^\rho \cdot \sum_{n=0}^\infty c_n x^n = \sum_{n=0}^\infty c_n x^{n+\rho}$ konvergiert für $x \in (0, R)$. Dann können wir sie zweimal ableiten und die Ableitungen lauten:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n (n+\rho) x^{n-1+\rho}, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n (n+\rho)(n-1+\rho) x^{n-2+\rho}.$$

Wir setzen dies in die Differentialgleichung ein, shiften gegebenenfalls im Summationsindex und sortieren nach den Potenzen von x:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} x^2 y''(x) + 3xy'(x) + (1 - x - x^2) y(x) \\
&= x^2 \cdot \sum_{n=0}^\infty c_n (n+\rho)(n-1+\rho) x^{n-2+\rho} + 3x \cdot \sum_{n=0}^\infty c_n (n+\rho) x^{n-1+\rho} + (1 - x - x^2) \cdot \sum_{n=0}^\infty c_n x^{n+\rho} \\
&= \sum_{n=0}^\infty c_n (n+\rho)(n-1+\rho) x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^\infty 3c_n (n+\rho) x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^\infty c_n x^{n+\rho} - \sum_{n=1}^\infty c_{n-1} x^{n+\rho} - \sum_{n=2}^\infty c_{n-2} x^{n+\rho} \\
&= \left(c_0(0+\rho)(0-1+\rho) + 3c_0(0+\rho) + c_0\right) x^{0+\rho} + \left(c_1(1+\rho)(1-1+\rho) + 3c_1(1+\rho) + c_1 - c_{1-1}\right) x^{1+\rho} \\
&\quad + \sum_{n=2}^\infty \left(c_n(n+\rho)(n-1+\rho) + 3c_n(n+\rho) + c_n - c_{n-1} - c_{n-2}\right) x^{n+\rho} \\
&= c_0 (\rho+1)^2 x^\rho + \left(c_1 (\rho+2)^2 - c_0\right) x^{1+\rho} + \sum_{n=2}^\infty \left(c_n (n+1+\rho)^2 - c_{n-1} - c_{n-2}\right) x^{n+\rho}.
\end{aligned}$$

Beim Term x^ρ lesen wir die definierende Gleichung für ρ ab:

$$0 \overset{!}{=} (\rho+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = -1.$$

Wir merken uns für spätere Schritte: Die quadratische Gleichung in ρ liefert $\rho = -1$ mit Vielfachheit 2. Wir rechnen nun die weiteren Koeffizienten c_n für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ in Abhängigkeit von c_0 aus:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} c_1 (\rho+2)^2 - c_0 = c_1 - c_0 && \Leftrightarrow \quad c_1 = c_0, \\
0 &\overset{!}{=} c_n (n+1+\rho)^2 - c_{n-1} - c_{n-2} = c_n n^2 - c_{n-1} - c_{n-2} && \Leftrightarrow \quad c_n = \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Um eine Intuition für die geschlossene Vorschrift zu raten, rechnen wir die ersten 5 Koeffizienten mit der Rekusionsformel aus:

$$c_1 = c_0, \qquad c_2 = \frac{c_1 + c_0}{4} = \frac{1}{2}c_0, \qquad c_3 = \frac{c_2 + c_1}{9} = \frac{1}{6}c_0,$$
$$c_4 = \frac{c_3 + c_2}{16} = \frac{1}{24}c_0, \qquad c_5 = \frac{c_4 + c_3}{25} = \frac{1}{120}c_0.$$

Wir erkennen in den Vorfaktoren Fakultäten. Eine Induktion zeigt: $c_n = \frac{1}{n!}c_0$ (wir lassen den Beweis hier aus). Somit haben wir eine Lösung y_1 gefunden durch:

$$y_1(x) = x^\rho \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{-1} \cdot c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = c_0 \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

Wie im Satz aus der Vorlesung machen wir den modifizierten Ansatz $y_2(x) = \ln(x) y_1(x) + x^\rho \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$. Wir rechnen die ersten beiden Ableitungen aus und setzen an geeigneten Stellen $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}$ ein:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \ln(x) y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+\rho} \\
y_2'(x) &= \ln(x) y_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n + d_n(n+\rho)\right) x^{n-1+\rho} = \ln(x) y_1'(x) + x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n + d_n(n+\rho)\right) x^{n+\rho} \\
y_2''(x) &= \ln(x) y_1''(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(c_n + d_n(n+\rho)\right)(n-1+\rho) + c_n(n+\rho)\right) x^{n-2+\rho} \\
&= \ln(x) y_1''(x) + x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(d_n(n+\rho)(n-1+\rho) + c_n(2n-1+2\rho)\right) x^{n+\rho}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} x^2 y_2''(x) + 3x y_2'(x) + (1 - x - x^2) y_2(x) \\
&= \ln(x) \underbrace{\left(x^2 y_1''(x) + 3x y_1'(x) + (1 - x - x^2) y_1(x)\right)}_{=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(d_n(n+\rho)(n-1+\rho) + c_n(2n-1+2\rho)\right) x^{n+\rho} \\
&\quad + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n + d_n(n+\rho)\right) x^{n+\rho} + (1 - x - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+\rho} \\
&= \left(d_0(0+\rho)(0-1+\rho) + c_0(0-1+2\rho) + 3(c_0 + d_0(0+\rho)) + d_0\right) x^{0+\rho} \\
&\quad + \left(d_1(1+\rho)(1-1+\rho) + c_1(2-1+2\rho) + 3(c_1 + d_1(1+\rho)) + d_1 - d_0\right) x^{1+\rho} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left(d_n(n+\rho)(n-1+\rho) + c_n(2n-1+2\rho) + 3(c_n + d_n(n+\rho)) + d_n - d_{n-1} - d_{n-2}\right) x^{n+\rho} \\
&= \Big(d_0 \left(\rho+1\right)^2 + 2c_0 \left(1+\rho\right)\Big) x^\rho + \left(d_1(\rho+2)^2 + 2c_1(\rho+2) - d_0\right) x^{1+\rho} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(d_n \left(n+\rho+1\right)^2 - d_{n-1} - d_{n-2} + 2c_n(n+\rho+1)\Big) x^{n+\rho}.
\end{aligned}$$

Wir setzen $\rho = -1$ ein:

$$0 \stackrel{!}{=} \left(d_0 \cdot 0^2 + 2c_0 \cdot 0\right) x^{-1} + (d_1 + 2c_1 - d_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(d_n n^2 - d_{n-1} - d_{n-2} + 2nc_n\right) x^{n-1}.$$

Damit können wir mit d_n für $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von c_0 bestimmen.

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} d_1 + 2c_1 - d_0 &&\Leftrightarrow \quad d_1 = d_0 - 2c_0, \\
0 &\stackrel{!}{=} d_n n^2 - d_{n-1} - d_{n-2} + 2nc_n &&\Leftrightarrow \quad d_n = \frac{d_{n-1} + d_{n-2}}{n^2} - \frac{2c_n}{n} = \frac{d_{n-1} + d_{n-2}}{n^2} - \frac{2}{n! \cdot n} c_0.
\end{aligned}$$

Wir rechnen damit die ersten 5 Koeffizienten in Abhängigkeit von c_0 aus. Außerdem setzen wir $d_0 = 0$ ein.

$$d_1 = -2c_0, \qquad d_2 = \frac{d_1 + d_0}{4} - \frac{1}{2}c_0 = -c_0, \qquad d_3 = \frac{d_2 + d_1}{9} - \frac{1}{9}c_0 = -\frac{4}{9}c_0,$$
$$d_4 = \frac{d_3 + d_2}{16} - \frac{1}{48}c_0 = -\frac{1}{9}c_0, \qquad d_5 = \frac{d_4 + d_3}{25} - \frac{1}{300}c_0 = -\frac{23}{900}c_0.$$

Bemerkung: In geschlossener Form können wir (ohne Beweis hier) schreiben:

$$y_2(x) = \mu\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \nu\frac{\mathrm{e}^x}{x} \cdot E_1(2x), \quad \text{mit} \quad E_a(z) \coloneqq \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t\cdot z} \cdot t^{-a}\,\mathrm{d}t\,, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion E_a ist ein sogenanntes elliptisches Integral und konvergiert für komplexe Zahlen z mit $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Aufgabe 11:
Für eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, definieren wir den Laplace-Operators in kartesischen Koordinaten

$$\Delta u \coloneqq \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Wir suchen in dieser Aufgabe Lösungen $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von $-\Delta u = \lambda u$ für ein $\lambda > 0$, wobei u eine radialsymmetrische Funktion ist, d.h. wir können $u(x) = v(r)$ für $r \coloneqq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ und eine Funktion $v\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ schreiben.

(i) Zeigen Sie: $\Delta u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$.

(ii) Führen Sie die Transformation $v(r) = r^{-\alpha}w(r)$ durch. Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass w eine Lösung von $r^2 w''(r) + rw'(r) + \left(\lambda r^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right) w(r) = 0$ ist.

(iii) Führen Sie die Transformation $w(r) = z(\beta \cdot r)$ durch. Finden Sie $\beta > 0$ so, dass z eine Besselsche Differentialgleichung löst.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 11:

(i) Wir untersuchen, wie der Laplace-Operator für eine radialsymmetrische Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aussieht. Hierfür berechnen wir zu erst die partiellen Ableitungen von r:

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}, \qquad \text{mit} \quad \delta_{ij} \coloneqq \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nun folgt mit der Kettenregel:

$$u(x) = v(r), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = v' \cdot \frac{x_i}{r},$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = v'' \cdot \frac{x_i^2}{r^2} + v' \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

Der Laplace-Operator hat also die Gestalt:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v'' \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + v' \cdot \frac{1}{r} \cdot n - v' \cdot \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 = v'' + \frac{n-1}{r}v'.$$

(ii) Wir führen nun die Transformation $v(r) = r^{-\alpha} w(r)$ durch. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda v(r) &= \lambda r^{-\alpha} w(r), \\
v'(r) &= -\alpha r^{-\alpha-1} w(r) + r^{-\alpha} w'(r), \\
v''(r) &= \alpha(\alpha+1) r^{-\alpha-2} w(r) - 2\alpha r^{-\alpha-1} w'(r) + r^{-\alpha} w''(r).
\end{aligned}$$

Setzen wir dies und Teil (i) in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \Delta u(x) + \lambda u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) + \lambda v(r) \\
&= r^{-\alpha-2} \cdot \big(r^2 w''(r) + (n-1-2\alpha) \cdot r w'(r) + \big(\lambda r^2 - \alpha\,(n-\alpha-2)\big)\, w(r)\big)\,.
\end{aligned}$$

Wir wollen den Faktor vor $rw'(r)$ auf 1 bringen. Also lösen wir auf:

$$1 \overset{!}{=} n - 1 - 2\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{n}{2} - 1.$$

Setzen wir dieses α ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} r^2 w''(r) + r w'(r) + \left(\lambda r^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(n - \frac{n}{2} + 1 - 2\right)\right) w(r) \\
&= r^2 w''(r) + r w'(r) + \left(\lambda r^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right) w(r).
\end{aligned}$$

(iii) Wir führen nun die Transformation $w(r) = z(\beta \cdot r)$ durch. Dann gilt:

$$w'(r) = \beta z'(\beta r), \qquad w''(r) = \beta^2 z''(\beta r).$$

Setzen wir dies in das Resultat aus Teil (ii) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} r^2 w''(r) + r w'(r) + \left(\lambda r^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right) w(r) \\
&= (\beta r)^2 z''(\beta r) + (\beta r) z'(\beta r) + \left(\frac{\lambda}{\beta^2} (\beta r)^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right) z(\beta r) \\
&= s^2 z''(s) + s z'(s) + \left(\frac{\lambda}{\beta^2} s^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right) z(s),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die neue Variable $s \coloneqq \beta r$ eingeführt haben. Wir erkennen: Für $\beta \coloneqq \sqrt{\lambda}$, erfüllt z die Besselsche Differentialgleichung $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$-ter Ordnung:

$$0 = s^2 z''(s) + s z'(s) + \left(s^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right) z(s).$$