Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 16. Dezember 2020 bis 22. Dezember 2020

Aufgabe 12:
Wir untersuchen in dieser Aufgabe das Räuber-Beute-Modell (oft auch Lotka-Volterra-Modell genannt):

$$(*)\begin{cases} u' = \alpha u - \beta uv, & u(0) = u_0 \\ v' = -\gamma v + \delta uv, & v(0) = v_0 \end{cases} \qquad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma, \delta, u_0, v_0 > 0.$$

Sei (u, v) die Lösung des AWP $(*)$ auf dem Intervall I.

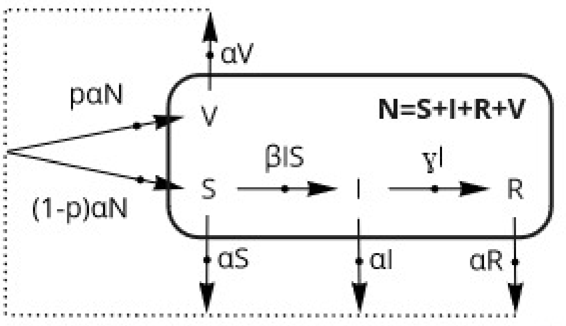
(i) Zeigen Sie: $u(t) > 0$ und $v(t) > 0$ für $t \in I$. *Hinweis:* Gehen Sie wie in der Vorlesung vor.

(ii) Verifizieren Sie: $E(t) := \delta u(t) - \gamma \ln(u(t)) + \beta v(t) - \alpha \ln(v(t))$ ist konstant.

(iii) Zeigen Sie durch Benutzen von (i) und (ii): u und v sind auf I beschränkt, d.h. $u(t_n) \to \infty$ oder $v(t_n) \to \infty$ für eine Folge $(t_n)_n$ ist unmöglich.

(iv) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen (d.h. $u'_{\text{stat}}(t) \equiv 0$ und $v'_{\text{stat}}(t) \equiv 0$) der DGL.

Aufgabe 13:
Sie haben in der Vorlesung das SIR-Modell zur Modellierung von Krankheitsausbreitungen kennen gelernt. Wir erweitern dieses Modell nun durch eine natürliche Geburten- und Sterberate α (die Gesamtzahl der Individuen soll konstant bleiben) und führen die Impfrate $p \in [0, 1]$ bei Kindern ein ($p = 0$ heißt: niemand wird geimpft; $p = 1$ heißt: alle werden geimpft). Damit gibt es nun die neue Bevölkerungsgruppe V ("vaccinated", geimpft) neben den bisherigen Gruppen S ("susceptible", ansteckbar), I ("infected", infiziert) und R ("recovered", genesen). Das System lautet nun:



$$\begin{aligned} S' &= (1-p)\alpha N - \alpha S - \beta IS, & S(0) &= S_0, \\ I' &= \beta IS - \alpha I - \gamma I, & I(0) &= I_0, \\ R' &= \gamma I - \alpha R, & R(0) &= 0, \\ V' &= p\alpha N - \alpha V, & V(0) &= 0, \\ N &:= S + I + R + V. \end{aligned}$$

Hier sind $\alpha, \beta, \gamma, S_0, I_0 > 0$ und $p \in [0, 1]$. Ohne Beweis nutzen wir die Tatsache: Für alle $t > 0$ sind $S(t), I(t), R(t), V(t) > 0$.

(i) Zeigen Sie: N ist konstant.

(ii) Machen Sie sich klar: N kann mit (i) aus den Anfangswerden bestimmt werden. Danach kann V explizit berechnet werden. Anschließend genügt es ein Anfangswerproblem in S und I zu lösen. Zum Schluss kann R aus N, V, S und I bestimmt werden. Geben Sie N und V explizit an.

(iii) Für welche p kann es eine stationäre Lösung (S^*, I^*, R^*, V^*) mit $I^* > 0$ geben?

Zusatzaufgabe: Wir nehmen $p > 1 - \frac{\alpha+\gamma}{N\beta}$ an, d.h. wir überschreiten die kritischen Impfrate. In dieser Situation können wir auf folgende Weise schrittweise zeigen, dass $I(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(a) Es gilt $V(t) \to pN$ für $t \to \infty$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für $t \geq T(\varepsilon)$ hinreichend groß: $S(t) \leq N - V(t) \leq (1-p)N + \varepsilon$.

(c) Zeigen Sie: Es gibt $\varepsilon, c > 0$, sodass für $t \geq T(\varepsilon)$ gilt: $I' \leq -cI$.

(d) Aus (c) folgt: $I(t)\mathrm{e}^{ct}$ ist monoton fallend für $t \geq T(\varepsilon)$. Insbesondere gilt: $I(t) \leq I(T(\varepsilon))\mathrm{e}^{cT(\varepsilon)} \cdot \mathrm{e}^{-ct} \to 0$ für $t \to \infty$.