Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 23. Dezember 2020 bis 12. Januar 2021

Aufgabe 12:
Wir untersuchen in dieser Aufgabe, wie sich superlineares Wachstum der rechten Seite in y auf die maximale Existenzzeit von Lösungen auswirken kann.

(i) Lösen Sie für $\alpha > 1$ mit der Methode der "Trennung der Variablen" das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y^\alpha, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall $I = (-\infty, T_{max}(\alpha))$ an. Wie verhält sich $T_{max}(\alpha)$ für $\alpha \to \infty$ und für $\alpha \searrow 1$?

(ii) Lösen Sie mit der Methode der "Trennung der Variablen" das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y \cdot \ln(y), \\ y(0) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

(iii) Rechnen Sie nach: $(u(t), v(t)) := (\sin(t), \cos(t))$ löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' = \quad (u^2 + v^2) \cdot v, \\ v' = -(u^2 + v^2) \cdot u, \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1. \end{cases}$$

Beobachten Sie in Teil (ii) und (iii): Die rechte Seite wächst stärker als linear und trotzdem existiert die Lösung für alle Zeiten! Der Satz aus der Vorlesung ist also eine hinreichende aber keine notwendige Bedingung.

Aufgabe 13:
Wir nutzen in dieser Aufgabe eine nützliche Abschätzung zur Picard-Iteration. Betrachten Sie das AWP

$$(*) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente mit Konstante L, d.h.

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\colon |f(x, y) - f(x, z)| \leq L \cdot |y - z|.$$

Wie in der Vorlesung schreiben wir den Picard-Operator: $T(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$. Wir definieren nun das Intervall $I := [x_0 - T_{max}, x_0 + T_{max}]$ mit $T_{max} < \frac{1}{L}$. Wir schreiben die Picard Iteration als $y_{n+1} := T(y_n)$ mit Start $y_0(t) \equiv y_0$.

(i) Rechnen Sie nach, dass T eine Selbstabbildung auf $C(I, \mathbb{R})$ ist und zeigen Sie, dass T Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\alpha := LT_{max} < 1$ ist.

(ii) Geben Sie eine Anzahl Iterationsschritte $N = N(y_0, T_{max}, L, \max_I |f(\cdot, y_0)|)$ an, sodass die Approximation y_N höchstens einen Abstand von 10^{-2} zur Lösung y_* des AWP hat.

Hinweise: Wir messen "Längen" hier in der Maximumsnorm auf I, d.h. $\|z\|_\infty := \max_{x \in I} |z(x)|$. Nutzen Sie ohne Beweis die a-priori Abschätzung $\|y_* - y_n\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|y_1 - y_0\|_\infty$. Optimalität von N ist in (ii) nicht verlangt.