Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Karlsruher Institut für Technologie

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 23. Dezember 2020 bis 12. Januar 2021

Aufgabe 12:
Wir untersuchen in dieser Aufgabe, wie sich superlineares Wachstum der rechten Seite in y auf die maximale Existenzzeit von Lösungen auswirken kann.

(i) Lösen Sie für $\alpha > 1$ mit der Methode der "Trennung der Variablen" das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y^\alpha, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall $I = (-\infty, T_{max}(\alpha))$ an. Wie verhält sich $T_{max}(\alpha)$ für $\alpha \to \infty$ und für $\alpha \searrow 1$?

(ii) Lösen Sie mit der Methode der "Trennung der Variablen" das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y \cdot \ln(y), \\ y(0) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

(iii) Rechnen Sie nach: $(u(t), v(t)) := (\sin(t), \cos(t))$ löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' = (u^2 + v^2) \cdot v, \\ v' = -(u^2 + v^2) \cdot u, \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1. \end{cases}$$

Beobachten Sie in Teil (ii) und (iii): Die rechte Seite wächst stärker als linear und trotzdem existiert die Lösung für alle Zeiten! Der Satz aus der Vorlesung ist also eine hinreichende aber keine notwendige Bedingung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12:

(i) Wie in den früheren Aufgaben zur "Trennung der Variablen" rechnen wir:

$$\begin{cases} y' = y^\alpha, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{y(x)} \frac{1}{\eta^\alpha} \,\mathrm{d}\eta = \int_0^x 1 \,\mathrm{d}s \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{1-\alpha} \eta^{1-\alpha} \right]_{\eta=1}^{\eta=y(x)} = [s]_{s=0}^{s=x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} y(x)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \cdot 1 = x - 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \left(\frac{1}{1-(\alpha-1)x} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Da $\alpha - 1 > 0$, hat die Lösung y genau eine Polstelle bei $x_{pol} = \frac{1}{\alpha-1}$. Das maximale Existenzintervall ist damit $I = (-\infty, \frac{1}{\alpha-1})$, d.h. $T_{max}(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$. Wir erkennen: $T_{max}(\alpha) \to \infty$ für $\alpha \searrow 1$ und $T_{max}(\alpha) \to 0$ für $\alpha \to \infty$. Dies passt zur Heuristik: Falls $\alpha = 1$, dann ist die Differentialgleichung linear und die Lösung exisitert für alle Zeiten. Falls α sehr groß ist, dann "explodiert" die rechte Seite in kurzer Zeit. Denn die Lösung wächst zum Zeitpunkt $t = 0$ (Anfangswert einsetzen), dann ist $y(0+\varepsilon) > 1 = y(0)$, also $y(0+\varepsilon)^\alpha$ ist sehr groß, y wächst noch schneller und eine Kettenreaktion setzt ein. Die Existenzzeit wird sehr klein.

(ii) Wir rechnen:

$$\begin{cases} y' = y \cdot \ln(y), \\ y(0) = \mathrm{e}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathrm{e}}^{y(x)} \frac{1}{\eta \cdot \ln(\eta)} \,\mathrm{d}\eta = \int_0^x 1 \,\mathrm{d}s \quad \overset{z=\ln(\eta)}{\Leftrightarrow} \quad \int_1^{\ln(y(x))} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = x - 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln(\ln(y)) - \ln(1) = x - 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)}.$$

Die Lösung y löst das AWP auf ganz $\mathbb{R}$, d.h. das maximale Existenzintervall lautet $I = \mathbb{R}$. Beachten Sie: Die rechte Seite wächst schneller als linear, d.h. es gibt keine Konstante $c > 0$, so dass für alle $y > 0$ gilt: $|y \cdot \ln(y)| \leq c \cdot (1 + |y|)$.

(iii) Die Funktion $(u, v)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(u(t), v(t)) := (\sin(t), \cos(t))$ erfüllt die Anfangsbedingungen $u(0) = 0$, $v(0) = 1$. Außerdem rechnen wir nach:

$$(u(t)^2 + v(t)^2) \cdot v(t) = (\sin(t)^2 + \cos(t)^2) \cdot \cos(t) = \cos(t) = u'(t),$$
$$-(u(t)^2 + v(t)^2) \cdot u(t) = -(\sin(t)^2 + \cos(t)^2) \cdot \sin(t) = -\sin(t) = v'(t).$$

Also ist (u, v) eine Lösung des AWP mit Existenzintervall $\mathbb{R}$. Beachten Sie: Die rechte Seite des Differentialgleichungssystems wächst etwa wie die dritte Potenz von $|(u, v)|_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$ (Euklidischer Betrag). Das heißt, auch bei einer polynomiell wachsenden rechten Seite kann das maximale Existenzintervall ganz $\mathbb{R}$ sein. In dieser Teilaufgabe können Sie beobachten, dass die rechte Seite $(u^2 + v^2)\begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$ senkrecht auf der Lösung $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ steht. Dies sagt uns (ohne Beweis hier), dass die Größe $E(t) := |(u(t), v(t))|_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$ eine Erhaltungsgröße ist und die Lösung beschränkt bleibt.

Aufgabe 13:
Wir nutzen in dieser Aufgabe eine nützliche Abschätzung zur Picard-Iteration. Betrachten Sie das AWP

$$(*) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente mit Konstante L, d.h.

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\colon |f(x, y) - f(x, z)| \leq L \cdot |y - z|.$$

Wie in der Vorlesung schreiben wir den Picard-Operator: $T(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \,\mathrm{d}t$. Wir definieren nun das Intervall $I := [x_0 - T_{max}, x_0 + T_{max}]$ mit $T_{max} < \frac{1}{L}$. Wir schreiben die Picard Iteration als $y_{n+1} := T(y_n)$ mit Start $y_0(t) \equiv y_0$.

(i) Rechnen Sie nach, dass T eine Selbstabbildung auf $C(I, \mathbb{R})$ ist und zeigen Sie, dass T Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\alpha := LT_{max} < 1$ ist.

(ii) Geben Sie eine Anzahl Iterationsschritte $N = N(y_0, T_{max}, L, \max_I |f(\cdot, y_0)|)$ an, sodass die Approximation y_N höchstens einen Abstand von 10^{-2} zur Lösung y_* des AWP hat.

Hinweise: Wir messen "Längen" hier in der Maximumsnorm auf I, d.h. $\|z\|_\infty := \max_{x \in I} |z(x)|$. Nutzen Sie ohne Beweis die a-priori Abschätzung $\|y_* - y_n\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|y_1 - y_0\|_\infty$. Optimalität von N ist in (ii) nicht verlangt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 13:

(i) Wir rechnen zu erst die Eigenschaft "Selbstabbildung" nach. Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist nach der Kettenregel die Funktion $x \mapsto f(x, y(x))$ stetig. Nach dem Hauptsatz der Integralrechung ist $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \,\mathrm{d}t$ differenzierbar, also insbesondere stetig. Damit ist also auch $T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \,\mathrm{d}t$ stetig. Da das Intervall I abgeschlossen und beschränkt (also kompakt) ist, ist $T(y)$

beschränkt.
Als nächstes zeigen wir die Lischitz-stetigkeit von T. Seien $y, z \in C(I, \mathbb{R})$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\|T(y) - T(z)\|_\infty &= \max_{x \in J} |T(y)(x) - T(z)(x)| = \max_{x \in J} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \,\mathrm{d}t - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t)) \,\mathrm{d}t \right| \\
&= \max_{x \in I} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \,\mathrm{d}t \right| \leq \max_{x \in I} \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| \,\mathrm{d}t \\
&\leq \max_{x \in I} \int_{x_0}^{x} L \cdot |y(t) - z(t)| \,\mathrm{d}t \leq \max_{x \in I} \int_{x_0}^{x} L \cdot \|y - z\|_\infty \,\mathrm{d}t = LT_{max} \cdot \|y - z\|_\infty.
\end{aligned}$$

Damit ist T Lipschitz mit Lipschitzkonstante $\alpha \coloneqq LT_{max}$. Nach Annahme ist $T_{max} < \frac{1}{L}$, also $\alpha < 1$.

(ii) Wir nutzen die a-priori-Abschätzung $\|y_* - y_n\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|y_1 - y_0\|_\infty$ aus dem Hinweis. Unser Ziel ist, die rechte Seite durch Vergrößern von n kleiner als 10^-2 zu bekommen. Dazu schätzen wir zuerst $\|y_1 - y_0\|_\infty$ ab. Mit der konstanten Funktion $y_0(t) \equiv y_0$, vorgegeben durch den Startwert, rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\|y_1 - y_0\|_\infty &= \|T(y_0) - y_0\|_\infty = \max_{x \in I} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t)) \,\mathrm{d}t - y_0 \right| = \max_{x \in I} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0) \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \max_{x \in I} \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)| \,\mathrm{d}t \leq \max_{x \in I} \int_{x_0}^{x} \max_{t \in I} |f(t, y_0)| \,\mathrm{d}t = T_{max} \cdot \max_{t \in I} |f(t, y_0)|.
\end{aligned}$$

Eine hinreichende Bedingung erhalten wir also durch:

$$\|y_* - y_N\|_\infty \leq \frac{\alpha^N}{1-\alpha} \|y_1 - y_0\|_\infty \leq \frac{\alpha^N}{1-\alpha} T_{max} \max_{t \in I} |f(t, y_0)| \overset{!}{\leq} 10^{-2}.$$

Die letzte Ungleichung formen wir äquivalent um zu

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^N}{1-\alpha} T_{max} \max_{t \in I} |f(t, y_0)| \leq 10^{-2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{100}{1-\alpha} T_{max} \max_{t \in I} |f(t, y_0)| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^N \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\ln\left(\frac{100}{1-LT_{max}} T_{max} \max_{t \in I} |f(t, y_0)|\right)}{\ln\left(\frac{1}{LT_{max}}\right)} \leq N.
\end{aligned}$$

Ab einem solchen N können wir für $n \geq N$ garantieren, dass der maximale Abstand der Poincare-Approximation zur Lösung höchstens 10^{-2} beträgt. Dieses N ist sicherlich nicht optimal, aber eine berechenbare Größe.