Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 13. Januar 2021 bis 19. Januar 2021

Aufgabe 14:
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(*)\begin{cases}\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I,\\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0,\end{cases} \qquad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b}(t) := \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{y}_0 := \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix, also eine matrixwertige und differenzierbare Funktion $\Phi\colon I \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\Phi'(t) = A \cdot \Phi(t)$ und $\det(\Phi(t)) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Nutzen Sie die "Variation der Konstanten"-Formel für Systeme aus der Vorlesung, um eine Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ zu bestimmen.

Aufgabe 15:
Wir betrachten nochmal ein Anfangswertproblem wie $(*)$ wie in Aufgabe 14 und werden die Lösung mithilfe von Ähnlichkeitstransformationen bestimmen.

(i) Sei $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine invertierbare Matrix und $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix, sodass $A = TDT^{-1}$. Substituieren Sie $\vec{z}(t) := T^{-1}\vec{y}(t)$. Zeigen Sie, dass $\vec{z}$ ein AWP der Form

$$(\diamond)\begin{cases}\vec{z}' = D\vec{z} + \vec{f}(t), \quad t \in I,\\ \vec{z}(0) = \vec{z}_0,\end{cases}$$

löst. Bestimmen Sie $\vec{f}$ und $\vec{z}_0$.

(ii) Beobachten Sie: Da D eine Diagonalmatrix ist, entkoppelt das System $(\diamond)$. Das heißt, Sie können jede Zeile einzeln und unabhängig von allen anderen Zeilen lösen!

(iii) Nutzen Sie Ihre Berechnungen aus Aufgabe 14 Teil (i), um T und D wie in Teil (i) zu bestimmen. Lösen Sie das System $\diamond$, transformieren Sie zurück und geben Sie die Lösung y des AWP $(*)$ an.

Bemerkung: Diese Strategie lässt sich auch für andere (evtl nicht-diagonalisierbare) Matrizen nutzen, um mit (i) das eventuell leichter zu lösende System $(\diamond)$ zu erhalten. Besonders vorteilhaft sind Systeme mit Dreiecksstruktur in D (siehe Skript).