Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 13. Januar 2021 bis 19. Januar 2021

Aufgabe 14:
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(*)\begin{cases}\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I,\\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0,\end{cases} \qquad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) := \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_0 := \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix, also eine matrixwertige und differenzierbare Funktion $\Phi\colon I \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\Phi'(t) = A \cdot \Phi(t)$ und $\det(\Phi(t)) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Nutzen Sie die "Variation der Konstanten"-Formel für Systeme aus der Vorlesung, um eine Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ zu bestimmen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 14:

(i) Wir beginnen damit, das Charakteristische Polynom der Matrix A zu bestimmen. Wir nutzen hierzu die Leibnitzsche Entwicklungsregel in der dritten Spalte und der Formel für 2×2-Determinanten:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2-\lambda & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & 2-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2-\lambda \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda) \cdot \left((2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot \frac{1}{3} \right) - 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3}(2-\lambda) \cdot \right) \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte lesen wir ab als 1, 2 und 3. Da wir im $\mathbb{R}^3$ arbeiten, wissen wir schon jetzt, dass A diagonalisierbar ist. Nun berechnen wir Mithilfe des Gauß-Algorithmus und dem "-1 Trick" die zugehörigen Eigenräume:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I_3) &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \; | \cdot \tfrac{3}{2} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
\mathrm{Eig}(A,2) = \mathrm{Kern}(A - 2 \cdot I_3) &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \; | \cdot 3 \\
&= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Eig}(A,3) = \operatorname{Kern}(A - 3\cdot I_3) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad |\cdot(-1)$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad |\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \quad = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir haben bei den Eigenverktoren noch die Wahl der Skalierung. Wir entscheiden uns in dieser Aufgabe dazu, sie so zu skalieren, dass nur ganze und möglichst viele positive Zahlen in den Koordinaten stehen. Damit erhalten wir die Eigenpaare:

$$\lambda_1 := 1, \quad \vec{v}^{\,(1)} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 := 2, \quad \vec{v}^{\,(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 := 3, \quad \vec{v}^{\,(3)} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren nun

$$\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \Phi(t) := \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{v}^{\,(1)} \;\middle|\; \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\vec{v}^{\,(2)} \;\middle|\; \mathrm{e}^{\lambda_3 t}\vec{v}^{\,(3)}\right) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{t} & 0 & 3\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

Oft werden die Eigenvektoren auch so skaliert, dass $\det(\Phi(t_0)) = 1$. Unsere Matrixfunktion erfüllt nach Konstruktion $\Phi'(t) = A\cdot\Phi(t)$. Nach der Vorlesung gilt $\det(\Phi(t)) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\det(\Phi(\tau)) \neq 0$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$. Wir berechnen die Determinante deshalb nur am Startwert. Hierzu nutzen wir den Gauß-Algorithmus und die Tatsache, dass die Determinante einer Diagonalmatrix aus dem Produkt der Diagonaleinträge besteht:

$$\det(\Phi(0)) = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad -1 \quad = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3} \quad = \det\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= 6\cdot 1\cdot(-3) = -18.$$

Wir haben damit eine Fundamentalmatrix gefunden.
Bemerkung: Falls Sie nicht den Satz aus der Vorlesung nutzen möchten, so sieht man mit der Multilinearität der Determinantenfunktion sofort $\det(\Phi(t)) = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}\det(\Phi(0)) = -18\mathrm{e}^{6t}$.

(ii) Bevor wir die "Variation der Konstanten"-Formel für Systeme aus der Vorlesung nutzen können, benötigen wir die Inverse von $\Phi(t)$. Wir überspringen diese Rechnung hier und geben nur das Ergebnis an:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\colon \quad \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t} & -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t} \\ \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t} & \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t} & -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Damit rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\vec{y}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{t} & 0 & 3\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{t} & 0 & 3\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-s} & -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-s} & \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-s} \\ 0 & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2s} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2s} \\ \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3s} & \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3s} & -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{t} & 0 & 3\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{t} & 0 & 3\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \cdot \int_{0}^{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-s} \\ -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2s} \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{t} & 0 & 3\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{t} & 0 & 3\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{12}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{4}\mathrm{e}^{t} + \frac{9}{4}\mathrm{e}^{3t} \\ -\frac{7}{12}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{3t} \\ \frac{7}{6}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+6t}{4}\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t} \\ -\frac{7+6t}{12}\mathrm{e}^{t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{12}\mathrm{e}^{3t} \\ \frac{-5+6t}{6}\mathrm{e}^{t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4+3t}{2}\mathrm{e}^{t} + 2\mathrm{e}^{3t} \\ -\frac{7+3t}{6}\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3t} \\ \frac{1+3t}{3}\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15:
Wir betrachten nochmal ein Anfangswertproblem wie $(*)$ wie in Aufgabe 14 und werden die Lösung mithilfe von Ähnlichkeitstransformationen bestimmen.

(i) Sei $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine invertierbare Matrix und $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix, sodass $A = TDT^{-1}$. Substituieren Sie $\vec{z}(t) := T^{-1}\vec{y}(t)$. Zeigen Sie, dass $\vec{z}$ ein AWP der Form

$$(\diamond)\begin{cases} \vec{z}\,' = D\vec{z} + \vec{f}(t), & t \in I, \\ \vec{z}(0) = \vec{z}_0, \end{cases}$$

löst. Bestimmen Sie $\vec{f}$ und $\vec{z}_0$.

(ii) Beobachten Sie: Da D eine Diagonalmatrix ist, entkoppelt das System $(\diamond)$. Das heißt, Sie können jede Zeile einzeln und unabhängig von allen anderen Zeilen lösen!

(iii) Nutzen Sie Ihre Berechnungen aus Aufgabe 14 Teil (i), um T und D wie in Teil (i) zu bestimmen. Lösen Sie das System $\diamond$, transformieren Sie zurück und geben Sie die Lösung y des AWP $(*)$ an.

Bemerkung: Diese Strategie lässt sich auch für andere (evtl nicht-diagonalisierbare) Matrizen nutzen, um mit (i) das eventuell leichter zu lösende System $(\diamond)$ zu erhalten. Besonders vorteilhaft sind Systeme mit Dreiecksstruktur in D (siehe Skript).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 15:

(i) Wir bestimmen die Ableitung von $\vec{z}$ und nutzen die Differentialgleichung des AWP $(*)$:

$$\begin{aligned} \vec{z}\,'(t) &= \left(T^{-1}\vec{y}(t)\right)' = T^{-1}\vec{y}\,'(t) \overset{(*)}{=} T^{-1}\left(A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)\right) = T^{-1}TDT^{-1}\vec{y}(t) + T^{-1}\vec{b}(t) \\ &= D\vec{z}(t) + T^{-1}\vec{b}(t). \end{aligned}$$

Wir setzen $\vec{f}(t) := T^{-1}\vec{b}(t)$. Für den Anfangswert gilt: $\vec{z}(t_0) = T^{-1}\vec{y}(t_0) = T^{-1}\vec{y}_0$. Wir setzen $\vec{z}_0 := T^{-1}\vec{y}_0$. Damit löst $\vec{z}$ das AWP $(\diamond)$.

(ii) Wir schreiben die Diagonalmatrix als $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$ und schreiben die Matrizen und Vektoren in $(\diamond)$ aus:

$$(\diamond)\begin{cases} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I, \\ \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ z_2(t_0) \\ z_3(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \\ z_{0,3} \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\begin{cases} z_1'(t) = d_1 \cdot z_1(t) + f_1(t), & t \in I, \\ z_1(t_0) = z_{0,1}, \end{cases} \\ \qquad\qquad\text{und} \\ (2)\begin{cases} z_2'(t) = d_2 \cdot z_2(t) + f_2(t), & t \in I, \\ z_2(t_0) = z_{0,2}, \end{cases} \\ \qquad\qquad\text{und} \\ (3)\begin{cases} z_3'(t) = d_3 \cdot z_3(t) + f_3(t), & t \in I, \\ z_3(t_0) = z_{0,3}. \end{cases} \end{cases}$$

Diese 3 Systeme können einzeln und unabhängig der anderen gelöst werden, z.B. mit der "Variation der Konstanten"-Formel:

$$z_i(t) = \mathrm{e}^{d_i(t-t_0)} z_{0,i} + \mathrm{e}^{d_i t} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-d_i s} f_i(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

(iii) Aus den Eigenpaaren

$$\lambda_1 := 1, \quad \vec{v}^{\,(1)} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 := 2, \quad \vec{v}^{\,(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 := 3, \quad \vec{v}^{\,(3)} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

lesen wir die Ähnlichkeitstransformation ab:

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad T := \left(\vec{v}^{\,(1)} \mid \vec{v}^{\,(2)} \mid \vec{v}^{\,(3)} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da $T = \Phi(0)$, haben wir die Inverse von T schon in Aufgabe 14 bestimmt:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir:

$$\vec{f}(t) := T^{-1}\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^t \\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^t \\ -\frac{1}{6}\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \qquad \vec{z}_0 := T^{-1}\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Wir lösen die entkoppelten Anfangswertprobleme mit der "Variation der Konstanten"-Formel:

$$(1) \begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t, & t \in I, \\ z_1(0) = \frac{7}{12}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1(t) = \mathrm{e}^t \cdot \frac{7}{12} + \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{1}{2}\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s = \frac{7+6t}{12}\mathrm{e}^t,$$

$$(2) \begin{cases} z_2'(t) = 2z_2(t) + \frac{2}{3}\mathrm{e}^t, & t \in I, \\ z_2(0) = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \cdot \frac{1}{3} + \mathrm{e}^{2t} \int_0^t \mathrm{e}^{-2s} \frac{2}{3}\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t},$$

$$(3) \begin{cases} z_3'(t) = 3z_3(t) - \frac{1}{6}\mathrm{e}^t, & t \in I, \\ z_3(0) = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_3(t) = \mathrm{e}^{3t} \cdot \frac{3}{4} + \mathrm{e}^{3t} \int_0^t \mathrm{e}^{-3s} \cdot \left(-\frac{1}{6}\mathrm{e}^s\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{12}\mathrm{e}^t + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3t}.$$

Damit lautet die Lösung des AWP ($\diamond$):

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \frac{7+6t}{12}\mathrm{e}^t \\ -\frac{2}{3}\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} \\ \frac{1}{12}\mathrm{e}^t + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

Nach Rücktransformation erhalten wir die Lösung $\vec{y}$ des AWP ($*$):

$$\vec{y}(t) = T\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4+3t}{2}\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{3t} \\ -\frac{7+3t}{6}\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3t} \\ \frac{1+3t}{3}\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$