Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 20. Januar 2021 bis 26. Januar 2021

Aufgabe 16:
Wir wollen in dieser Aufgabe e^A für eine diagonalisierbare Matrix berechnen. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = TDT^{-1}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie: $A^n = TD^nT^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Erinnerung: Man definiert $B^0 := I_3$ für jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(iii) Berechnen Sie e^D und damit e^A.

Aufgabe 17:
Wir untersuchen in dieser Aufgabe das asymptotische Verhalten eines homogenen Anfangswertproblems. Betrachten Sie

$$(*) \begin{cases} \vec{y}\,' = A\vec{y}, & t \in \mathbb{R} \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}, \qquad A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche Startwerte $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{y}(t)$ für $t > 0$ unbeschränkt, für welche $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{y}(t)$ für $t > 0$ beschränkt und für welche $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ gilt $\vec{y}(t) \to 0$ für $t \to \infty$? Beziehen Sie in Ihrer Antwort die Eigenwerte und Eigenvektoren von A ein.