Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 20. Januar 2021 bis 26. Januar 2021

Aufgabe 16:
Wir wollen in dieser Aufgabe e^A für eine diagonalisierbare Matrix berechnen. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = TDT^{-1}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie: $A^n = TD^nT^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Erinnerung: Man definiert $B^0 := I_3$ für jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(iii) Berechnen Sie e^D und damit e^A.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 16:

(i) Wir berechnen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Dazu bestimmen wir zuerst das Charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) :=& \det(A - \lambda \cdot I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} \\ =& (2-\lambda) \cdot \left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \right) = (2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda). \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die zugehörigen Eigenräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A,-1) :=& \mathrm{Kern}(A - (-1)\cdot I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ =& \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ \mathrm{Eig}(A,2) :=& \mathrm{Kern}(A - 2\cdot I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ =& \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit -1 bzw. mit -2, um möglichst viele betragsmäßig kleine, positive und ganze Zahlen in den Eigenvektoren zu erhalten. Unsere Eigenpaare lauten dann:

$$\lambda_1 := -1, \quad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 := 2, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 := 2, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir könnten auch jede andere linear unabhägige Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ nehmen. Nun erhalten wir die Ähnlichkeitstransformation durch:

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T := \left(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $A = TDT^{-1}$. Für später geben wir nun noch die Inverse von T an:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir beweisen die Aussage per Induktion. Beachten Sie, dass wir hier nicht speziell auf die Struktur von A, D und T eingehen. Es genügen allein die Aussagen, dass alle Matrizen quadratisch sind, T invertierbar ist und $A = TDT^{-1}$ gilt.
Induktionsanfang für $n = 0$:
Nach Definition gilt $A^0 = I_3$. Wir rechnen außerdem: $TD^0T^{-1} = TI_3T^{-1} = I_3$. Somit gilt die Behauptung für $n = 0$.
Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.
Induktionsschluss von n zu $n+1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \overset{(IV)}{=} TD^n \underbrace{T^{-1}T}_{=I_3} DT^{-1} = TD^n \cdot DT^{-1} = TD^{n+1}T^{-1}.$$

Also gilt die Behauptung auch für $n+1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung damit für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion und dem Wissen "D is eine Diagonalmatrix" berechnen wir e^D:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^D &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^n & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit genau dieser Rechnung können Sie auch $\exp(\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_N)) = \operatorname{diag}(\exp(\mu_1), \ldots, \exp(\mu_N))$ für beliebige $\mu_i \in \mathbb{C}$ zeigen. Nun berechnen wir e^A mit den Teilen (i) und (ii):

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^D &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} TD^nT^{-1} = T \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n \right) \cdot T^{-1} = T\mathrm{e}^D T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \\ -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Technik funktioniert nicht nur mit $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sondern mit jeder Funktion, die sich global in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Man nennt dieses Erweitern von Funktionen auf $\mathbb{R}$ zu operatorwertigen Funktionen $\mathbb{R}^{N \times N} \to \mathbb{R}^{N \times N}$ einen Funktionalkalkül.

Aufgabe 17:
Wir untersuchen in dieser Aufgabe das asymptotische Verhalten eines homogenen Anfangswertproblems. Betrachten Sie

$$(*)\begin{cases}\vec{y}\,' = A\vec{y}, & t\in\mathbb{R} \\ \vec{y}(0)=\vec{y}_0\end{cases}, \qquad A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche Startwerte $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{y}(t)$ für $t>0$ unbeschränkt, für welche $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{y}(t)$ für $t>0$ beschränkt und für welche $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ gilt $\vec{y}(t)\to 0$ für $t\to\infty$? Beziehen Sie in Ihrer Antwort die Eigenwerte und Eigenvektoren von A ein.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 17:
Wir bestimmen zu erst eine Fundamentalmatrix Φ mithilfe der Matrixexponentialfunktion. Dafür berechnen wir zu erst die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von A. Das Charakteristische Polynom lautet:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det(A-\lambda\cdot I_3) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot\big((-1-\lambda)^2-(-1)^2\big) = (1-\lambda)(0-\lambda)(-2-\lambda). \end{aligned}$$

Also lauten die Eigenwerte von A: -2, 0 und 1. Wir berechnen die zugehörigen Eigenräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A,-2) &:= \mathrm{Kern}(A-(-2)\cdot I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \mid\cdot\frac{1}{3} \end{matrix} \\ &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ \mathrm{Eig}(A,0) &:= \mathrm{Kern}(A-0\cdot I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \mid\cdot(-1) \\ + \\ \end{matrix} \\ &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ \mathrm{Eig}(A,1) &:= \mathrm{Kern}(A-1\cdot I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2} \longleftarrow + \mid\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ + \quad \mid\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \\ \end{matrix} \\ &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir beobachten, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen (dies liegt daran, dass $A=A^T$). Deshalb bietet es sich an, die Eigenvektoren auf Euklid-Norm 1 zu skalieren. Unsere Eigenpaare lauten dann:

$$\lambda_1 := -2,\quad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 := 0,\quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 := 1,\quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun erhalten wir die Ähnlichkeitstransformation von A zu einer Diagonalmatrix durch:

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T := \big(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $A = TDT^{-1}$. Wir geben noch die Inverse von T an. Diese entsteht durch transponieren, da T orthogonal ist (Spalten stehen senkrecht aufeinander und haben alle Euklid-Norm 1):

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir mit der Matrixexponentialfunktion eine Fundamentalmatrix $\Phi(t) := \mathrm{e}^{tA}$ konstruieren und das AWP lösen. Mit dieser gilt: $\vec{y}$ löst $(*)$ genau dann, wenn $\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{y}_0$. Wir geben zwei Varianten an, wie diese Aufgabe weiter gelöst werden kann:

Variante 1: explizites Rechnen.
Wir rechnen die Lösung des AWP $(*)$ explizit aus.

$$\begin{aligned}\Phi(t) =& \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{T\cdot tD\cdot T^{-1}} = T\cdot \mathrm{e}^{tD}\cdot T^{-1} = T\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{diag}(\lambda_1 t, \lambda_2 t, \lambda_3 t)}\cdot T^{-1} = T\cdot \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \mathrm{e}^{\lambda_3 t})\cdot T^{-1} \\ =& \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mit der Fundamentalmatrix gilt:

$$\vec{y} \text{ löst } (*) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{y}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{y_{0,1}-y_{0,2}}{2} + \frac{y_{0,1}+y_{0,2}}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ \frac{-y_{0,1}+y_{0,2}}{2} + \frac{y_{0,1}+y_{0,2}}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ y_{0,3}\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir alle 3 Komponenten, so sehen wir: Die Lösung $\vec{y}$ ist für $t > 0$ beschränkt, genau dann, wenn $y_{0,3} = 0$. Weiter gilt: $\vec{y}(t) \to 0$ für $t \to \infty$ genau dann, wenn $y_{0,3} = 0$ und $y_{0,1} = y_{0,2}$. Dies entspricht genau den Relationen zu den Eigenvektoren der zweiten Variante.

Variante 2: Ausnutzen der Basis aus Eigenvektoren.
Die Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ bilden eine Basis, da A diagonalisierbar ist. Es existieren also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ mit: $\vec{y}_0 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$. Da die Eigenvektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen und auf Euklid-Norm 1 normiert sind, bilden sie sogar eine Orthonormalbasis. Solch eine Basis kann immer dann konstruiert werden, wenn $A = A^T$. Damit gilt dann $\alpha_i = \langle \vec{y}_0 | \vec{v}_i \rangle$. Wir erinnern uns, wie T^{-1} auf den Eigenvektoren operiert: $T^{-1}\vec{v}_i = \vec{e}_i$, wobei $\vec{e}_i$ der i-te Standartbasisvektor ist, d.h. 1 in der i-ten Komponente und 0 sonst. Außerdem ist die Multiplikation von Diagonalmatrizen mit Standartbasisvektoren leicht zu berechnen: $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_N)\vec{e}_i = \mu_i\vec{e}_i$. Damit können wir die zeitliche Entwicklung der Lösung des AWP geschickt darstellen:

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{y}_0 &= T\cdot \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \mathrm{e}^{\lambda_3 t})\cdot T^{-1}\cdot(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3) \\ &= T\cdot \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \mathrm{e}^{\lambda_3 t})\cdot(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3) \\ &= T\cdot\big(\alpha_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\vec{e}_2 + \alpha_3\mathrm{e}^{\lambda_3 t}\vec{e}_3\big) \\ &= \alpha_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \alpha_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + \alpha_3\mathrm{e}^{\lambda_3 t}\vec{v}_3.\end{aligned}$$

Wir sehen also für unsere diagonalisierbare Matrix: Der Anteil des Startvektors $\vec{y}_0$ in Richtung des i-ten Eigenvektors, entwickelt sich mit $\mathrm{e}^{\lambda_i t} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}(\cos(\mathrm{Im}(\lambda_i)t) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(\lambda_i)t))$. Eigenvektoren, bei denen der Eigenwert einen positiven Realteil besitzt, werden exponentiell verstärkt, Eigenvektoren, bei denen der Eigenwert einen negativen Realteil besitzt, werden exponentiell gedämpft für wachsende Zeiten t und Eigenwerte mit Realteil gleich 0 behalten ihren Absolutwert bei. Damit folgern wir mit unseren Eigenwerten $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$: Die Lösung $\vec{y}$ ist für $t > 0$ genau dann beschränkt, wenn $\alpha_3 = 0$. $\vec{y}(t) \to 0$ für $t \to \infty$ genau dann, wenn $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$. Diese Bedingungen kombiniert mit $\alpha_i = \langle \vec{y}_0 | \vec{v}_i \rangle$ entsprechen genau den Bedingungen aus der ersten Variante.
Bemerkung: Falls A nicht diagonalisierbar ist, so kann auch polynomiales Wachstum vorkommen.