Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 27. Januar 2021 bis 2. Februar 2021

Aufgabe 18:
Lösen Sie die folgende inhomogene Transportgleichung mit Anfangswert:

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u = \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2}, & \vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \\ u(\vec{x}, 0) = \frac{1}{\ln\left(2+x_1^2\right)}, & \vec{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Aufgabe 19:
Wir betrachten in dieser Aufgabe die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

und suchen eine selbstähnliche Lösung u, d.h. es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \lambda > 0\colon \quad u(\vec{x}, t) = \lambda^\alpha u(\sqrt{\lambda}\vec{x}, \lambda t).$$

Im Folgenden sei u eine selbstähnliche Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Wir machen den Ansatz: Es gibt eine Funktion $v\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $v(|\vec{x}\,|) = u(\vec{x}, 1)$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $u(\vec{x}, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{|\vec{x}\,|}{\sqrt{t}}\right)$.

(ii) v löst

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) + \frac{1}{2} r v'(r) + \alpha\, v(r) = 0. \tag{$*$}$$

(iii) Für $\alpha = \frac{n}{2}$ ist $(*)$ äquivalent zu

$$\left(r^{n-1} v'(r) + \frac{1}{2} r^n v(r)\right)' = 0. \tag{$**$}$$

(iv) Finden Sie eine beschränkte, nichttriviale Lösung von $(**)$ und geben Sie die selbstähnliche Lösung u der homogenen Wärmeleitungsgleichung an.

Hinweis zu (ii)*:* Nach Aufgabe 11, Übungsblatt 5 gilt $\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r$ für radialsymmetrische Funktionen.