Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 27. Januar 2021 bis 2. Februar 2021

Aufgabe 18:
Lösen Sie die folgende inhomogene Transportgleichung mit Anfangswert:

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \nabla u = \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2}, & \vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \\ u(\vec{x}, 0) = \frac{1}{\ln\left(2+x_1^2\right)}, & \vec{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 18:
Wir schreiben analog zur Notation der Vorlesung für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$:

$$g(\vec{x}, t) := \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2}, \qquad f(\vec{x}) := \frac{1}{\ln(2+x_1^2)}, \qquad \vec{a} := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Wir beobachten, dass sowohl der Anfangswert f als auch die rechte Seite g im AWP $(*)$ stetig differenzierbare Funktionen sind. Damit können wir die Formel aus der Vorlesung benutzen und die Lösung u des AWP $(*)$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= f(\vec{x} - \vec{a}\, t) + \int_0^t g(\vec{x} + (\rho - t)\vec{a}, \rho)\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{\ln(2 + (x_1 - 1 \cdot t)^2)} + \int_0^t \frac{1}{1 + (x_1 + (\rho - t) \cdot 1)^2} + \frac{1}{1 + (x_2 + (\rho - t) \cdot 1)^2}\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{\ln(2 + (x_1 - t)^2)} + [\arctan(x_1 - t + \rho) + \arctan(x_2 - t + \rho)]_{\rho=0}^{\rho=t} \\ &= \frac{1}{\ln(2 + (x_1 - t)^2)} + \arctan(x_1) + \arctan(x_2) - \arctan(x_1 - t) - \arctan(x_2 - t). \end{aligned}$$

Aufgabe 19:
Wir betrachten in dieser Aufgabe die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

und suchen eine selbstähnliche Lösung u, d.h. es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \lambda > 0: \quad u(\vec{x}, t) = \lambda^\alpha u(\sqrt{\lambda}\vec{x}, \lambda t).$$

Im Folgenden sei u eine selbstähnliche Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Wir machen den Ansatz: Es gibt eine Funktion $v\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $v(|\vec{x}\,|) = u(\vec{x}, 1)$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $u(\vec{x}, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{|\vec{x}\,|}{\sqrt{t}}\right)$.

(ii) v löst

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) + \frac{1}{2} r v'(r) + \alpha\, v(r) = 0. \qquad (*)$$

(iii) Für $\alpha = \frac{n}{2}$ ist $(*)$ äquivalent zu

$$\left(r^{n-1}v'(r) + \frac{1}{2}r^n v(r)\right)' = 0. \tag{$**$}$$

(iv) Finden Sie eine beschränkte, nichttriviale Lösung von $(**)$ und geben Sie die selbstähnliche Lösung u der homogenen Wärmeleitungsgleichung an.

Hinweis zu (ii)*:* Nach Aufgabe 11, Übungsblatt 5 gilt $\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r$ für radialsymmetrische Funktionen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 19:

(i) In der Gleichung für Selbstähnlichkeit setzen wir $\lambda = \frac{1}{t}$. Dies ergibt $\lambda t = 1$ und wir erhalten:

$$\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0\colon \quad u(\vec{x}\,, t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha} u\left(\sqrt{\frac{1}{t}} \cdot \vec{x}\,, 1\right) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{|\vec{x}\,|}{\sqrt{t}}\right).$$

(ii) Aus Teil (i) folgt direkt, dass u radialsymmetrisch in $\vec{x}$ ist. Damit können wir die Darstellung des radialen Laplaceoperator aus Aufgabe 11, Übungsblatt 5 wie im Hinweis nutzen. Wir schreiben $r := |\vec{x}\,|$ und rechnen mit Teil (i):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}\,, t) - \Delta u(\vec{x}\,, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\right) - \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right)\left(\frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\right) \\
&= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{t^\alpha} v'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\frac{-r}{2t^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{t^{\alpha+1}} v''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) - \frac{n-1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}} r} v'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $-t^{\alpha+1}$ und schreiben $\tilde{r} = \frac{r}{\sqrt{t}}$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha v\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) + \frac{r}{2\sqrt{t}} v'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) + v''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) + \frac{(n-1)\sqrt{t}}{r} v'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) \\
&= v''(\tilde{r}) + \frac{(n-1)}{\tilde{r}} v'(\tilde{r}) + \frac{1}{2}\tilde{r} v'(\tilde{r}) + \alpha v(\tilde{r}),
\end{aligned}$$

d.h. v löst die Differentialgleichung $(*)$. Wir schreiben im Folgenden wieder r statt $\tilde{r}$.

(iii) Wir sehen mithilfe der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}r^{1-2\alpha}(r^{2\alpha}v(r))' &= \frac{1}{2}r^{1-2\alpha}2\alpha r^{2\alpha-1}v(r) + \frac{1}{2}r^{1-2\alpha}r^{2\alpha}v'(r) = \alpha v(r) + \frac{1}{2}rv'(r), \\
r^{1-n}(r^{n-1}v'(r))' &= r^{1-n}(n-1)r^{n-2}v'(r) + r^{1-n}r^{n-1}v''(r) = \frac{n-1}{r}v'(r) + v''(r).
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$0 = r^{1-n}(r^{n-1}v'(r))' + r^{1-2\alpha}\left(\frac{1}{2}r^{2\alpha}v(r)\right)'.$$

Mit $\alpha = \frac{n}{2}$ gilt $r^{1-n} = r^{1-2\alpha}$, d.h. wir erhalten wie behauptet

$$0 = \left(r^{n-1}v'(r) + \frac{1}{2}r^n v(r)\right)'.$$

(iv) Nach Teil (iii) wissen wir:

$$r^{n-1}v'(r) + \frac{1}{2}r^n v(r) \equiv a$$

für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$. Wegen der Radialsymmetrie von u folgt: $v'(0_+) = 0$. Also gilt:

$$\frac{a}{r^{n-1}} \equiv v'(r) + \frac{1}{2} r v(r) \xrightarrow{r \to 0_+} 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot v(0) = 0.$$

Damit muss $a = 0$ gelten. Wir erhalten also die Differentialgleichung

$$v'(r) + \frac{1}{2} r v(r) = 0, \qquad r > 0.$$

an v. Diese kann zum Beispiel durch die Methode der Trennung der Variablen gelöst werden. Wir rechnen:

$$-\frac{1}{2} r = \frac{v'(r)}{v(r)} = \big(\ln(v(r))\big)' \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} r^2 + \tilde{c} = \ln(v(r)) \quad \Leftrightarrow \quad v(r) = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{4} r^2\right).$$

Der Parameter c ist frei wählbar. Nun lautet unsere selbstähnliche Lösung u der Wärmeleitungsgleichung:

$$u(\vec{x}, t) = \frac{c}{t^\alpha} v\left(\frac{|\vec{x}|}{\sqrt{t}}\right) = \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}\right), \quad \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Diese Lösung wird auch oft der "Wärmeleitungskern" genannt und ist für die Lösung der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung von großer Bedeutung. Oft wird $c := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ gesetzt, denn dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, \mathrm{d}x = 1$.