Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 3. Februar 2021 bis 9. Februar 2021

Aufgabe 20:
Wie in der Vorlesung betrachten wir eine 1-dimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen. Wir betrachten zwei interessante Größen. Sei u eine Lösung von

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $W(t) := \int_0^1 u(x,t)\,\mathrm{d}x$ ist konstant und $E(t) := \int_0^1 |u(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$ ist monoton fallend für $t > 0$.
Hinweis: Sie dürfen hier ohne Beweis Integral und Differentiation vertauschen.

Aufgabe 21:
Wir möchten den Ansatz der Separation der Variablen nutzen, um Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf einem 2-dimensionalen Ball mit Dirichlet-Randbedingungen zu finden. Betrachten Sie

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \vec{x} \in B_R(0), t > 0, \\ u(\vec{x},0) = f(\vec{x}), & \vec{x} \in B_R(0), \\ u(\vec{x},t) = 0, & |\vec{x}|_2 = R, t > 0. \end{cases}$$

Gehen Sie wir folgt vor:

(i) Setzen Sie den Ansatz $u(\vec{x},t) = v(t)w(|\vec{x}|)$ in die Differentialgleichung ein und zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$v'(t) = -\lambda v(t), \qquad -\Delta w = -w''(r) - \frac{1}{r}w'(r) = \lambda w(r).$$

Argumentieren Sie, dass $\lambda > 0$ gelten muss.
Hinweis: Multiplizieren Sie $-\Delta w = \lambda w$ mit w und integrieren Sie.

(ii) Zeigen Sie: $w(r) = c \cdot J_0(\sqrt{\lambda} r)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ist, J_0 die Besselschen Differentialgleichung nullter Ordnung löst und stetig in 0 ist.
Hinweise: Aufgabe 11 auf Übungsblatt 5 und Vorlesung 5.

(iii) Wir stellen fest, dass $\sqrt{\lambda}R$ eine Nullstelle der Besselfunktion J_0 sein muss, damit u wie im Ansatz $(*)$ löst. Formulieren Sie eine Klasse von Anfangswerten f, für welche Sie das AWP $(*)$ lösen können.