Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 3. Februar 2021 bis 9. Februar 2021

Aufgabe 20:
Wie in der Vorlesung betrachten wir eine 1-dimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen. Wir betrachten zwei interessante Größen. Sei u eine Lösung von

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $W(t) \coloneqq \int_0^1 u(x,t)\,\mathrm{d}x$ ist konstant und $E(t) \coloneqq \int_0^1 |u(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$ ist monoton fallend für $t > 0$.
Hinweis: Sie dürfen hier ohne Beweis Integral und Differentiation vertauschen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 20:
u ist eine Lösung von $(*)$ und damit (mindestens) eine C^1-Funktion. Damit ist W als Integral über u in x ebenfalls eine C^1-Funktion. Genauso E ist eine C^1-Funktion, denn die Verkettung mit $(\cdot)^2$ liefert ebenfalls wieder eine C^1-Funktion. Wir leiten W und E ab und vertauschen wie im Hinweis Integral und Differentiation (dies ist erlaubt, da $u \in C^1$ und $B_R(0)$ kompakt ist). Wir nutzen die Differentialgleichung und die Randwerte und rechnen für $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0. \\ \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 |u(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2u(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2u(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x \\ &= 2u(1,t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) - 2u(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \int_0^1 2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x = 0 - 2\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2\mathrm{d}x < 0. \end{aligned}$$

Also ist W für $t > 0$ konstant und E monoton fallend für $t > 0$. Für W gilt insbesondere mit der Anfangsbedingung:

$$W(t) = W(0) = \int_0^1 u(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 21:
Wir möchten den Ansatz der Separation der Variablen nutzen, um Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf einem 2-dimensionalen Ball mit Dirichlet-Randbedingungen zu finden. Betrachten Sie

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \vec{x} \in B_R(0), t > 0, \\ u(\vec{x},0) = f(\vec{x}), & \vec{x} \in B_R(0), \\ u(\vec{x},t) = 0, & |\vec{x}|_2 = R, t > 0. \end{cases}$$

Gehen Sie wir folgt vor:

(i) Setzen Sie den Ansatz $u(\vec{x},t) = v(t)w(|\vec{x}|)$ in die Differentialgleichung ein und zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$v'(t) = -\lambda v(t), \qquad -\Delta w = -w''(r) - \frac{1}{r}w'(r) = \lambda w(r).$$

Argumentieren Sie, dass $\lambda > 0$ gelten muss.
Hinweis: Multiplizieren Sie $-\Delta w = \lambda w$ mit w und integrieren Sie.

(ii) Zeigen Sie: $w(r) = c \cdot J_0(\sqrt{\lambda}r)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ist, J_0 die Besselschen Differentialgleichung nullter Ordnung löst und stetig in 0 ist.
Hinweise: Aufgabe 11 auf Übungsblatt 5 und Vorlesung 5.

(iii) Wir stellen fest, dass $\sqrt{\lambda}R$ eine Nullstelle der Besselfunktion J_0 sein muss, damit u wie im Ansatz $(*)$ löst. Formulieren Sie eine Klasse von Anfangswerten f, für welche Sie das AWP $(*)$ lösen können.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 21:

(i) Wie in der Vorlesung setzen wir den Ansatz $u(\vec{x},t) = v(t)w(|\vec{x}|)$ in die Differentialgleichung ein. Wir schreiben $r := |\vec{x}|$ und rechnen wie in der Vorlesung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = v'(t)w(r) - v(t)\left(w''(r) + \frac{1}{r}w'(r)\right) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= \frac{v'(t)}{v(t)} - \frac{w''(r) + \frac{1}{r}w'(r)}{w(r)}, \qquad \text{falls } \ v(t) \neq 0 \text{ und } w(r) \neq 0. \end{aligned}$$

Der erste Bruch ins unabhängig von r, der zweite Bruch ist unabhängig von t und die Gleichung muss für alle $\vec{x} \in \Bbbk_R(0), t > 0$ gelten, d.h. beide Brüche müssen konstant sein. Da ihre Differenz 0 ergibt, müssen beide Konstanten gleich sein. Wir schreiben die Konstante als $-\lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir v als:

$$v'(t) = -\lambda v(t) \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = v(0)\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Die Differentialgleichung an w lautet:

$$-w''(r) - \frac{1}{r}w'(r) = \lambda w(r).$$

Wir argumentieren nun, dass $\lambda > 0$ gilt. Dazu multiplizieren wir beide Seiten wie im Hinweis mit w und integrieren:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B_R(0)} w^2(|\vec{x}|)\,\mathrm{d}\vec{x} &= \int_{B_R(0)} -\Delta w(|\vec{x}|) \cdot w(|\vec{x}|)\,\mathrm{d}\vec{x} \\ &= \oint_{\partial B_R(0)} -\nabla w(|\vec{x}|) \cdot w(|\vec{x}|)\,\mathrm{d}\sigma + \int_{B_R(0)} \nabla w(|\vec{x}|) \bullet \nabla w(|\vec{x}|)\,\mathrm{d}\vec{x} \\ &= 0 + \int_{B_R(0)} |\nabla w(|\vec{x}|)|^2\,\mathrm{d}\vec{x} > 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Greensche Formel genutzt (partielle Integration in mehreren Dimensionen), die Randwerte eingesetzt und für das Skalarprodukt "$\bullet$" geschrieben (∇w ist ein Vektor). Da $\int_{B_R(0)} w^2\,\mathrm{d}r > 0$, muss $\lambda > 0$ gelten. Wir sehen damit ebenfalls: v ist exponentiell fallend in t.

(ii) Wir können mit Teil (i) nun Aufgabe 11 auf Übungsblatt 5 mit $n = 2$ nutzen. Dazu setzen wir

$$w(r) = r^{\frac{n}{2}-1} z(\sqrt{\lambda}r) = z(\sqrt{\lambda}r).$$

Dann löst z die Besselsche Differentialgleichung der Ordnung $\frac{n}{2} - 1 = 0$. Da w stetig in 0 gesucht ist, muss auch z stetig in 0 sein. Aus Vorlesung 5 wissen wir, dass die Besselsche Differentialgleichung 0-ter Ordnung (bis auf Vielfache) genau eine Lösung besitzt, welche stetig in 0 ist. Diese Lösung lautet:

$$J_0(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{s}{2}\right)^{2k}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Also gilt $w(r) = c \cdot J_0(\sqrt{\lambda}r)$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Im Folgenden absorbieren wir $v(0)$ in c.

(iii) Wir setzen unsere Erkenntnisse aus (i) und (ii) in die Randwerte ein:

$$\forall\, |\vec{x}|_2 = R, t > 0\colon \quad 0 \stackrel{!}{=} u(\vec{x}, t) = v(t)w(R) = c\mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot J_0(\sqrt{\lambda}R).$$

Um nicht konstant die Nulllösung gefunden zu haben, muss $c \neq 0$ gelten und $\sqrt{\lambda}R$ eine Nullstelle von J_0 sein. Setzen wir den Anfangswert bei $t = 0$ ein, so muss gelten:

$$\forall\, \vec{x} \in B_R(0)\colon f(\vec{x}) \stackrel{!}{=} u(\vec{x}, 0) = c \cdot J_0(\sqrt{\lambda}r).$$

Wir können mit unserem Ansatz $u(\vec{x}, t) = v(0)\mathrm{e}^{-\lambda t} J_0(\sqrt{\lambda}|\vec{x}|)$, wobei $\sqrt{\lambda}R$ eine Nullstelle von J_0 ist, radial verteilte Vielfache von J_0 als Anfangswert zulassen. In Vorlesung 5 haben wir gesehen, dass J_0 abzählbar unendlich viele Nullstellen besitzt. Da $(*)$ ein lineares Problem ist, können wir diese Lösungen auch linearkombinieren, d.h. wir können Anfangswerte der Form

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m} c_k J_0(\sqrt{\lambda_k}|\vec{x}|), \qquad \text{wobei} \;\; m \in \mathbb{N},\; c_k \in \mathbb{R},\; J_0(\sqrt{\lambda_k}R) = 0,$$

zulassen. Die zugehörige Lösung lautet dann:

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{k=0}^{m} c_k J_0(\sqrt{\lambda_k}|\vec{x}|)\mathrm{e}^{-\lambda_k t}.$$

Zusatz:
Die Funktionen $J_0(\sqrt{\lambda_k}|\vec{x}|)$ (mit λ_k wie oben) bilden eine Basis des Funktionenraumes $L^2_{\mathrm{rad}}(B_R(0))$, d.h. jede radialsymmetrische Funktion $f\colon B_R(0) \to \mathbb{R}$ mit $\int_{B_R(0)} |f|^2 \,\mathrm{d}\vec{x} < \infty$ kann geschrieben werden als $f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_0(\sqrt{\lambda_k}|\vec{x}|)$ für gewisse Zahlen c_k. Die Lösungsformel aus (iii) gilt dann mit ∞ statt m. Möchte man auch nicht-radialsymmetrische Funktionen betrachten, so muss man jede radiale Basisfunktion $J_0(\sqrt{\lambda_k}|\vec{x}|)$ mit den passenden Kugelflächenfunktionen multiplizieren, um eine volle Basis von $L^2(B_R(0))$. Mehr Details finden Sie auf den entsprechenden Wikipedia-Einträgen (die englische Version bietet oft mehr Details als die deutsche).