Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 10. Februar 2021 bis 16. Februar 2021

Aufgabe 22:
Berechnen Sie die Fouriertransformierten von

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ für $a > 0$.

(ii) $g(x) = \begin{cases} \sin(x), & |x| \le 2\pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 23:

(i) Wir betrachten die folgende homogene Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$:

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sei f absolut integrierbar und u die Lösung von $(*)$. Zeigen Sie: $|u(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}x$ und somit $|u(x,t)| \to 0$ für $t \to \infty$.

(ii) Wir betrachten die folgende homogene Wärmeleitungsgleichung auf $(0,1)$ mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(**) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(a) Lösen Sie $(**)$ mit einem Separationsansatz $u(x,t) = v(t)w(x)$ wie in der Vorlesung. Welche Anfangswerte f können Sie damit direkt lösen?

(b) Nutzen Sie nun Linearkombinationen des Separationsansatzes. Formulieren Sie eine Klasse von Anfangswerten f, für welche Sie das AWP $(**)$ lösen können.

(c) Zeigen Sie: Für die Klasse von Anfangswerten f aus (b) gilt für die Lösung u des Problems $(**)$: $u(x,t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Bemerkung: Wir erkennen, dass Randbedingungen für das Verhalten für $t \to \infty$ eine große Rolle spielen. In der Vorlesung wurde $(**)$ mit den Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) \equiv 0$ betrachten und dort wurde gefolgert, dass $u(x,t) \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ für $t \to \infty$ konvergiert.