Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 10. Februar 2021 bis 16. Februar 2021

Aufgabe 22:
Berechnen Sie die Fouriertransformierten von

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ für $a > 0$.

(ii) $g(x) = \begin{cases} \sin(x), & |x| \leq 2\pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 22:

(i) Wir nutzen die Formel der Definition aus der Vorlesung und rechnen für $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{ax-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{a-\mathrm{i}\xi}\mathrm{e}^{ax-\mathrm{i}x\xi}\right]_{x=-\infty}^{x=0} + \left[\frac{1}{-a-\mathrm{i}\xi}\mathrm{e}^{-ax-\mathrm{i}x\xi}\right]_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \frac{1}{a-\mathrm{i}\xi}\cdot 1 - \frac{1}{a-\mathrm{i}\xi}\cdot 0 + \frac{1}{-a-\mathrm{i}\xi}\cdot 0 - \frac{1}{-a-\mathrm{i}\xi}\cdot 1 \\
&= \frac{a+\mathrm{i}\xi}{(a-\mathrm{i}\xi)(a+\mathrm{i}\xi)} + \frac{a-\mathrm{i}\xi}{(a-\mathrm{i}\xi)(a+\mathrm{i}\xi)} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$

(ii) Wir nutzen die Formel der Definition aus der Vorlesung und rechnen für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-2\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\mathrm{i}x\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\cdot(1-\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\mathrm{i}x\xi} - \frac{1}{\mathrm{i}\cdot(-1-\xi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-\mathrm{i}x\xi}\right]_{x=-2\pi}^{x=+2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-\xi}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(1-\xi)} - \frac{1}{1+\xi}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(1+\xi)} + \frac{1}{1-\xi}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(1-\xi)} + \frac{1}{1+\xi}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(1+\xi)}\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{1+\xi}\sin(2\pi(1+\xi)) - \frac{\mathrm{i}}{1-\xi}\sin(2\pi(1-\xi)).
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die oben ausgelassenen Stellen:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(1) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-2\pi}^{2\pi} 1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[x + \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right]_{x=-2\pi}^{x=+2\pi} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(2\pi + \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\pi} + 2\pi - \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi}\right) = -2\pi\mathrm{i}, \\
\hat{g}(-1) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \int_{2\pi}^{-2\pi} \sin(-z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\cdot(-1)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}x = -\hat{g}(1) = 2\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Beobachten Sie, dass $\hat{g}$ stetig ist. Dies liegt daran, dass "schnell" abfällt.

Aufgabe 23:

(i) Wir betrachten die folgende homogene Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$:

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sei f absolut integrierbar und u die Lösung von $(*)$. Zeigen Sie: $|u(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x$ und somit $|u(x,t)| \to 0$ für $t \to \infty$.

(ii) Wir betrachten die folgende homogene Wärmeleitungsgleichung auf $(0,1)$ mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(**) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(a) Lösen Sie $(**)$ mit einem Separationsansatz $u(x,t) = v(t)w(x)$ wie in der Vorlesung. Welche Anfangswerte f können Sie damit direkt lösen?

(b) Nutzen Sie nun Linearkombinationen des Separationsansatzes. Formulieren Sie eine Klasse von Anfangswerten f, für welche Sie das AWP $(**)$ lösen können.

(c) Zeigen Sie: Für die Klasse von Anfangswerten f aus (b) gilt für die Lösung u des Problems $(**)$: $u(x,t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Bemerkung: Wir erkennen, dass Randbedingungen für das Verhalten für $t \to \infty$ eine große Rolle spielen. In der Vorlesung wurde $(**)$ mit den Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) \equiv 0$ betrachten und dort wurde gefolgert, dass $u(x,t) \to \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$ für $t \to \infty$ konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 23:

(i) Wir nutzen die Lösungsformel aus der Vorlesung und erhalten damit eine Darstellung der Lösung u:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} \right) \cdot f(y) \, \mathrm{d}y \right| \le \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} \right) \cdot |f(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot 1 \cdot |f(y)| \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, \mathrm{d}y \,. \end{aligned}$$

Da f absolut integrierbar ist, ist das Integral konvergent. Da $\frac{1}{\sqrt{t}} \to 0$ für $t \to \infty$, folgt $|u(x,t)| \to 0$ für $t \to \infty$. Beachten Sie, dass wir hier sogar eine Mindestgeschwindigkeit für die Konvergenz sehen und diese gleichmäßig in x ist, d.h. unabhängig von x können wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zeit $T > 0$ finden, sodass für alle $t > T$ gilt $|u(x,t)| < \varepsilon$.

(ii)

(a) Einsetzen des Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ in die Differentialgleichung in $(**)$ liefert:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = v'(t)w(x) - v(t)w''(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \frac{v'(t)}{v(t)} - \frac{w''(x)}{w(x)},$$

falls $w(x) \neq 0 \neq v(t)$. Da diese Gleichheit für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t > 0$ gelten soll, muss es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass:

$$v'(t) = -\lambda v(t), \qquad -w''(x) = \lambda w(x).$$

Für die Randwerte erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} u(x,0) = v(t)w(0), \\ 0 &\overset{!}{=} u(x,1) = v(t)w(1), \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad f(x) \overset{!}{=} u(x,0) = v(0)w(x).$$

Zusammen erhalten wir also

$$\boxdot \begin{cases} -w''(x) = \lambda w(x), & x \in \mathbb{R}, \\ w(0) = w(1) = 0, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \odot \begin{cases} v'(t) = -\lambda v(t), & t > 0, \\ v(0) = \frac{f(x)}{w(x)} \overset{!}{=} \text{const}. \end{cases}$$

Wie in Aufgabe 21 auf Übungsblatt 11 sehen wir, dass $\lambda > 0$ gelten muss (Multiplizieren der Gleichung an w und Integrieren liefert diese Aussage). Also hat w die Form

$$w(x) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right).$$

Einsetzen der Randwerte liefert

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} w(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1, \\ 0 &\overset{!}{=} w(0) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda}\right), \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\right) \end{pmatrix}$$

Damit w nicht konstant die Nullfunktion ist, muss die Determinante der Matrix 0 sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$, d.h. wenn es ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gibt, sodass $\lambda = \pi^2 k^2$. In diesem Fall liegt der Vektor $(1,0)^T$ im Kern der Matrix, d.h. die Lösung w des Randwertproblems $\boxdot$ lautet $w(x) = A \sin(\pi k x)$. Beachten Sie, dass $k = 0$ nicht erlaubt ist, da die Lösungsfunktion dann $w \equiv 0$ lautet würde und wir eine nichttriviale Lösung suchen. Damit das AWP $\odot$ für v aus unserem Separationsansatz lösbar ist, muss f ein Vielfaches von w sein. In diesem Fall lautet die Lösung v des AWP $\odot$: $v(t) = v(0)\exp\left(-\pi^2 k^2 t\right)$.

(b) In Teil (a) haben wir gesehen: Falls es ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = c \cdot \sin(\pi k x)$, dann löst $u(x,t) = c\exp\left(-\pi^2 k^2 t\right)\sin(\pi k x)$ das AWP $(**)$. Dies lässt sich direkt auf endliche Linearkombinationen erweitern: Falls f von der Form $f(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \cdot \sin(\pi k x)$, dann löst $u(x,t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \exp\left(-\pi^2 k^2 t\right)\sin(\pi k x)$ das AWP $(**)$. Wir haben hier $k = 0$ nicht gesondert verboten, da dies nur ein "+0" in der Summe bewirken würde.
Bemerkung: Mit mehr mathematischem Hintergrundwissen lässt sich zeigen: Jede Funktion $f \in L^2(0,1)$, d.h. $\int_0^1 |f|^2 \, dx < \infty$ lässt sich schreiben als $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \sin(\pi k x)$ (Fourier-Reihe). Dann lautet die Lösung des AWP $(**)$: $u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-\pi^2 k^2 t\right)\sin(\pi k x)$. Diese Lösung ist eindeutig.

(c) Wir beobachten, dass $\sin(\pi \cdot 0 \cdot x) \equiv 0$. Damit gilt für die Lösungen aus (b):

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \sum_{k=-m}^{m} |c_k| \exp\left(-\pi^2 k^2 t\right) |\sin(\pi k x)| \leq \sum_{k=1}^{m} (|c_-k| + |c_k|) \exp\left(-\pi^2 k^2 t\right) \cdot 1 \\ &\leq \exp\left(-\pi^2 t\right) \cdot \sum_{k=1}^{m} (|c_-k| + |c_k|) \xrightarrow{t \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir hier wieder eine Konvergenzgeschwindigkeit ablesen können, nämlich $\exp\left(-\pi^2 t\right)$, und diese Konvergenz wieder gleichmäßig in x ist, d.h. unabhängig von x können wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zeit $T > 0$ finden, sodass für alle $t > T$ die Abschätzung $|u(x,t)| < \varepsilon$ gilt.
Bemerkung: Man kann diese Aussagen auch für die unendliche Reihe verallgemeinern.