Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 17. Februar 2021 bis 19. Februar 2021

Aufgabe 24:
Wir betrachten die homogene Wellengleichung

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(i) Wir nehmen an, dass $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ und es ein $R > 0$ gibt, sodass $f(x) = g(x) \equiv 0$ für $|x| \geq R$. Sei u die eindeutige Lösung von $(*)$. Zeigen Sie: $P(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$ ist konstant und $W(t) := \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\mathrm{d}x$ erfüllt die Gleichung $W(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + t \cdot \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Rechnen Sie nach, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} W(t) = 0$.

(ii) Seien nun $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ und $g(x) := x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Lösen Sie das Problem $(*)$.

Aufgabe 25:
Wir betrachten die folgende homogene Wellengleichung auf $(0, \pi)$ mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0,\pi), t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,\pi), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(i) Lösen Sie $(*)$ mit dem Separationsansatz $u(x,t) = v(t)w(x)$ wie in der Vorlesung. Welche Anfangswerte f und g können Sie damit direkt lösen?

(ii) Nutzen Sie nun Linearkombinationen des Separationsansatzes. Formulieren Sie eine Klasse von Anfangswerten f und g, für welche Sie das AWP $(*)$ lösen können.

(iii) Zeigen Sie: Für die Klasse von Anfangswerten f und g aus (ii) gilt für die Lösung u des Problems $(*)$: $u(x,t) = u(x,t+2\pi)$ für $x \in (0,\pi), t \in \mathbb{R}$.