Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

Behandelt von 17. Februar 2021 bis 19. Februar 2021

Aufgabe 24:
Wir betrachten die homogene Wellengleichung

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(i) Wir nehmen an, dass $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ und es ein $R > 0$ gibt, sodass $f(x) = g(x) \equiv 0$ für $|x| \geq R$. Sei u die eindeutige Lösung von $(*)$. Zeigen Sie: $P(t) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$ ist konstant und $W(t) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\mathrm{d}x$ erfüllt die Gleichung $W(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + t \cdot \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Rechnen Sie nach, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}W(t) = 0$.

(ii) Seien nun $f(x) \coloneqq \frac{1}{1+x^2}$ und $g(x) \coloneqq x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Lösen Sie das Problem $(*)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 24:

(i) Nach unserer Annahme sind die Anfangswerte f und g genügend glatt, sodass die Lösung u von $(*)$ eine C^2-Funktion ist. Außerdem sind f und g konstant 0 außerhalb einer Kugel mit Radius R. Wie in der Vorlesung sehen wir durch die Lösungsformel, dass die Lösung u zum Zeitpunkt t konstant 0 außerhalb einer Kugel um $x = 0$ mit Radius $R + t$ ist. Dies resultiert aus der endlichne Ausbreitunggeschwindigkeit von Wellen. Damit werden im Folgenden alle Ableitungen, die wir hinschreiben, existieren, absolut integrierbar in x sein und ebenso alle Produkte absolut integrierbar in x sein zu jedem Zeitpunkt t.
Wir leiten P und W ab. Da u eine C^2-Funktion ist und u, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, die Produkte $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ zu jedem Zeitpunkt t absolut integrierbar in x sind, dürfen wir Integral und Ableitung vertauschen. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\mathrm{d}x = 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}W(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Hier haben wir zur besseren Lesbarkeit die Argumente im Integral weggelassen und ausgenutzt, dass $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ konstant 0 außerhalb der Kugel um $x = 0$ mit Radius $R + t$ sind. Wir sehen also, dass P konstant ist und W eine Gerade ist. Wir berechnen P und W genauer:

$$\begin{aligned} P(t) &= P(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ W(t) &= W(0) + t \cdot W'(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,\mathrm{d}x + t \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + t \cdot \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

(ii) Wir nutzen die Lösungsformel aus der Vorlesung. Für $x, t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} + \int_{x-t}^{x+t} s\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x+t)^2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-t)^2}\right) \\
&= \frac{2(1+x^2+t^2)}{(1+(x+t)^2)\,(1+(x-t)^2)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2-t^2}\sinh(2xt).
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile erkennen Sie gut die nach rechts wandernde Welle ($x - t$ als Argument) und die nach links wandernde Welle ($x + t$ als Argument). In der letzten Zeile erkennen Sie gut das Abfallverhalten der Lösung für große Werte von x oder t.

Aufgabe 25:
Wir betrachten die folgende homogene Wellengleichung auf $(0, \pi)$ mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0,\pi), t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,\pi), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(i) Lösen Sie $(*)$ mit dem Separationsansatz $u(x,t) = v(t)w(x)$ wie in der Vorlesung. Welche Anfangswerte f und g können Sie damit direkt lösen?

(ii) Nutzen Sie nun Linearkombinationen des Separationsansatzes. Formulieren Sie eine Klasse von Anfangswerten f und g, für welche Sie das AWP $(*)$ lösen können.

(iii) Zeigen Sie: Für die Klasse von Anfangswerten f und g aus (ii) gilt für die Lösung u des Problems $(*)$: $u(x,t) = u(x, t+2\pi)$ für $x \in (0,\pi), t \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 25:

(i) Einsetzen des Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ in die Differentialgleichung in $(*)$ liefert:

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = v''(t)w(x) - v(t)w''(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \frac{v''(t)}{v(t)} - \frac{w''(x)}{w(x)},$$

falls $w(x) \neq 0 \neq v(t)$. Da diese Gleichheit für alle $x \in (0,\pi)$ und $t \in \mathbb{R}$ gelten soll, muss es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass:

$$-v''(t) = \lambda v(t), \qquad -w''(x) = \lambda w(x).$$

Für die Rand- und Anfangswerte erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} u(0,t) = v(t)w(0), \\ 0 &\overset{!}{=} u(\pi,t) = v(t)w(\pi), \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} f(x) &\overset{!}{=} u(x,0) = v(0)w(x), \\ g(x) &\overset{!}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v'(0)w(x). \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also

$$\boxdot \begin{cases} -w''(x) = \lambda w(x), & x \in (0,\pi), \\ w(0) = w(\pi) = 0, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \odot \begin{cases} -v''(t) = \lambda v(t), & t \in \mathbb{R}, \\ v(0) = \frac{f(x)}{w(x)} \overset{!}{=} c, \\ v'(0) = \frac{g(x)}{w(x)} \overset{!}{=} d. \end{cases}$$

Wie in Aufgabe 21 auf Übungsblatt 11 sehen wir, dass $\lambda > 0$ gelten muss (Multiplizieren der Gleichung an w und Integrieren inklusive Einsetzen der Randwerte liefert diese Aussage). Also hat w die Form

$$w(x) = A \cdot \sin\Big(\sqrt{\lambda} x\Big) + B \cdot \cos\Big(\sqrt{\lambda} x\Big).$$

Einsetzen der Randwerte liefert

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} w(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1, \\ 0 &\overset{!}{=} w(\pi) = A \cdot \sin\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big) + B \cdot \cos\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big), \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big) & \cos\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big) \end{pmatrix}$$

Damit w nicht konstant die Nullfunktion ist, muss die Determinante der Matrix 0 sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sin\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big) = 0$, d.h. wenn es ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gibt, sodass $\lambda\pi^2 = \pi^2 k^2$. In diesem Fall liegt der Vektor $(1, 0)^T$ im Kern der Matrix, d.h. die Lösung w des Randwertproblems $\boxdot$ lautet $w(x) = A \sin(kx)$. Beachten Sie, dass $k = 0$ nicht erlaubt ist, da die Lösungsfunktion dann $w \equiv 0$ lautet würde und wir eine nichttriviale Lösung suchen. Damit das AWP $\odot$ für v aus unserem Separationsansatz lösbar ist, müssen f und g Vielfache von w sein. In diesem Fall lautet die Lösung v des AWP $\odot$:

$$v(t) = c \cos(kt) + \frac{d}{k} \sin(kt).$$

(ii) In Teil (i) haben wir gesehen: Falls es ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $c, d \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = c \sin(kx)$ und $g(x) = d \sin(kx)$, dann lautet die Lösung von $(*)$:

$$u(x, t) = \left(c \cos(kt) + \frac{d}{k} \sin(kt)\right) \cdot \sin(kx)$$

Dies lässt sich direkt auf endliche Linearkombinationen erweitern: Falls f und g von der Form $f(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \sin(kx)$ und $g(x) = \sum_{k=-m}^{m} d_k \sin(kx)$, dann lautet die Lösung von $(*)$:

$$u(x, t) = \sum_{k=-m}^{m} \left(c_k \cos(kt) + \frac{d_k}{k} \sin(kt)\right) \cdot \sin(kx)$$

Wir haben hier $k = 0$ nicht gesondert verboten, da dies nur ein "+0" in der Summe bewirken würde. **Bemerkung:** Mit mehr mathematischem Hintergrundwissen lässt sich zeigen: Jede Funktion $f \in L^2(0, \pi)$, d.h. $\int_0^\pi |f|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$ lässt sich schreiben als $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sin(kx)$ (Fourier-Reihe). Analog für $g \in L^2(0, \pi)$: $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \sin(kx)$. Dann lautet die Lösung des AWP $(**)$: $u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(c_k \cos(kt) + \frac{d_k}{k} \sin(kt)\right) \cdot \sin(kx)$. Diese Lösung ist eindeutig. Hierbei muss der Begriff "Lösung" an die Regularität von f und g angepasst werden (wir geben keine Details hier).

(iii) Seien f und g von der Form $f(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \sin(kx)$ und $g(x) = \sum_{k=-m}^{m} d_k \sin(kx)$. Nach (ii) lautet die Lösung von $(*)$: $u(x, t) = \sum_{k=-m}^{m} \left(c_k \cos(kt) + \frac{d_k}{k} \sin(kt)\right) \cdot \sin(kx)$. Damit folgt mit der 2π-Periodizität von sin und cos:

$$\begin{aligned} u(x, t + 2\pi) &= \sum_{k=-m}^{m} \left(c_k \cos(kt + 2k\pi t) + \frac{d_k}{k} \sin(kt + 2k\pi t)\right) \cdot \sin(kx) \\ &= \sum_{k=-m}^{m} \left(c_k \cos(kt) + \frac{d_k}{k} \sin(kt)\right) \cdot \sin(kx) = u(x, t). \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Aussage gilt genauso für unendliche Reihen wie in Teil (ii).