Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Entscheiden Sie für die folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

(a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n-1$

(b) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2-2n+3$

(c) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}, \quad A \mapsto \min\{a \mid a \in A\}$

(d) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (a,b) \mapsto \frac{(a+b-2)(a+b-1)}{2} + a$

Hinweis: Sie dürfen in Teil (d) die Formel $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien A eine Menge und M_λ, $\lambda \in \Lambda$, eine nichtleere Familie von Mengen. Zeigen Sie:

(a) $A \times \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} (A \times M_\lambda)$.

(b) $\mathcal{P}\Big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\Big) \supseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{P}(M_\lambda)$.

(c) In (b) gilt die umgekehrte Inklusion im Allgemeinen nicht.

Sei nun N_λ, $\lambda \in \Lambda$, eine weitere Familie von Mengen. Weiter gebe es für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$ ein $\nu \in \Lambda$, so dass $M_\lambda \subseteq M_\nu$ und $N_\mu \subseteq N_\nu$. Zeigen Sie:

(d) $\Big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\Big) \times \Big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\Big) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (M_\lambda \times N_\lambda)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Ein *gerichteter Graph* G besteht aus einer Menge $V(G)$ von Knoten und einer Menge $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ von Kanten.

(a) Vergleichen Sie die obige Definition eines Graphen mit der Definition eines Graphen aus Aufgabe 4 von Blatt 1.

Eine Abbildung $f\colon G \to H$ von Graphen besteht aus zwei Funktionen $f_V\colon V(G) \to V(H)$ und $f_E\colon E(G) \to E(H)$, so dass $f_E((u,v)) = (f_V(u), f_V(v))$ für alle Kanten $e = (u,v) \in E(G)$.

(b) Entscheiden Sie, ob es Graphen G, H und eine Abbildung $f\colon G \to H$ von Graphen gibt, so dass

  (i) f_V injektiv und f_E nicht injektiv

  (ii) f_V surjektiv und f_E nicht surjektiv

  (iii) f_V nicht injektiv und f_E injektiv

  (iv) f_V nicht surjektiv und f_E surjektiv

ist. Geben Sie entweder Graphen G, H und ein solches $f\colon G \to H$ an oder zeigen Sie, dass es keine solche Abbildung f von Graphen geben kann.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) $\forall X \subseteq A\colon f^{-1}(f(X)) = X$.

(iii) $\forall X, Y \subseteq A\colon f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$.

(iv) $\forall X, Y \subseteq A\colon X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \emptyset$.

(v) $\forall X, Y \subseteq A\colon X \subseteq Y \Rightarrow f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$.

Aufgabe 5 (wird nicht korrigiert)
Am Abend des 12. November stellt ein Tutor[1] seine Studenten auf eine harte Probe. Er bringt sie in einen seltsam anmutenden Raum mit zwei Türen. Die Fenster und Wände des Raums sind mit zahlreichen Plakaten bedeckt, während an den Türen beschriftete Schilder hängen. Der Tutor erklärt:

> „Hinter jeder der beiden Türen wartet entweder ein Schreibtisch oder eine Gruppe eurer Kommilitonen auf euch. Wählt ihr die Tür mit dem Schreibtisch, so werdet ihr diesen Abend an genau jenem Schreibtisch verbringen und weitere Aufgaben zu lösen haben. Sind jedoch eure Kommilitonen hinter der Tür, so dürft ihr heute mit ihnen zur großen *Mathebau-Reopening-Party* gehen."

Daraufhin deutet der Tutor auf die zwei Schilder

Die Wahl der Tür macht keinen Unterschied.	Eure Kommilitonen warten hinter der anderen Tür.

an den Türen und fährt fort:

> „Warten eure Kommilitonen hinter der linken Tür, so ist die Aussage auf dem linken Schild wahr. Steht dort der Schreibtisch, so ist die Aussage falsch. Mit der anderen Tür verhält es sich genau andersherum."

(a) Formalisieren Sie das Rätsel des Tutors. Sie können dabei mit zwei Variablen $L =$„Hinter der linken Tür warten Kommilitonen" und $R =$„Hinter der rechten Tür warten Kommilitonen" auskommen.

(b) Verhelfen Sie den Studenten zu einem schönen Abend auf der *Mathebau-Reopening-Party*, indem Sie herausfinden, welche Tür sie wählen sollten und indem Sie sie dort am 12. November ab 19:00 Uhr treffen.[2]

Abgabe bis spätestens Montag, den 9. 11. 2015, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und die Nummer Ihres Tutoriums an!

[1] Dieser seine Kompetenzen überschreitende Tutor möchte hier aus offensichtlichen Gründen namentlich nicht genannt werden.
[2] Am 12. November findet ab 19:00 Uhr tatsächlich die Mathebau-Reopening-Party der Fachschaft statt. Für mehr Informationen siehe `mathebau.rocks`.