Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

gegeben. Weiter seien $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ und $V = \langle v_1, v_2 \rangle$.

(a) Berechnen Sie eine Basis B von $U \cap V$.

(b) Ergänzen Sie die Basis B zu Basen C_U und C_V von U bzw. V.

(c) Ergänzen Sie C_U zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 3\}$ der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Weiter sei für $\lambda \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $E_\lambda \colon V \to \mathbb{R}$ durch $E_\lambda(f) = f(\lambda)$ gegeben.

(a) Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} E_\lambda$.

(b) Berechnen Sie für $\lambda \neq \mu$ eine Basis von $\operatorname{Kern} E_\lambda \cap \operatorname{Kern} E_\mu$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_p \in V$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in K$ und

$$w_i = \begin{cases} v_1 & \text{falls } i = 1, \\ v_i - \alpha_i v_{i-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Erzeugnisse $\langle v_1, \dots, v_p \rangle$ und $\langle w_1, \dots, w_p \rangle$ stimmen überein.

(b) Die Vektoren $v_1, \dots, v_p$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $w_1, \dots, w_p$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Weiter sei $\Phi \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Kern}(\Phi) \cap \operatorname{Bild}(\Phi) = \{0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes $u \in V$ eine eindeutige Darstellung $u = v + w$ mit $v \in \operatorname{Kern}(\Phi)$ und $w \in \operatorname{Bild}(\Phi)$ besitzt.

Seien nun $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter sei $\Phi \colon V \to V$ gegeben durch

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big).$$

(c) Zeigen Sie, dass Φ ein Endomorphismus von V mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$ ist.

(d) Bestimmen Sie für $f \in V$, $f(x) = e^x$, Funktionen $g \in \operatorname{Kern}(\Phi)$ und $h \in \operatorname{Bild}(\Phi)$ mit $f = g + h$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe (4 Bonuspunkte)
Schneewittchen war der widrigen Witterung trotzend in bester Weihnachtslaune. Leider hatte die Stiefmutter verabsäumt, ihr das Plätzchenbacken beizubringen, und so musste sie sich hierbei auf die Zwerge verlassen. Ihr Wunsch jedoch war glasklar: alle Vorräte an Mehl, Butter, Zucker, Mandeln und Eiern sollten in Essbares verwandelt werden. Von allen anderen Zutaten war praktisch beliebig viel vorhanden oder konnte jedenfalls schnell herbeigeschafft werden. Doch nun sollte es schwierig werden:

Stempel, der Buchhalterzwerg, wusste natürlich genau, was an Vorräten vorhanden war. Er wollte aber erst dann sein Wissen preisgeben, wenn klar war, dass nicht er das Gebäck herzustellen habe. Rempel war aufgrund seiner körperlichen Konstitution eher geeignet, in der Schlussphase der Weihnachtszeit die dann noch notwendigen Einkäufe zu erledigen. Krempel verkaufte auf dem lokalen Weihnachtsmarkt, Hempel versteckte sich unter dem Sofa, und Tümpel war auch abgetaucht.

Es war nichts zu machen mit diesem verwöhnten Zwergenpack! Keiner wollte backen!

Zum Glück kehrte gerade der eilige Oberschlau aus dem Morgenland zurück, wo er auf einer Tagung einen neuen Freund gewonnen hatte. Dieser war zunächst etwas mürrisch, als Oberschlau ihn fragte: „Würdest Du Dich bitte hier statuieren, damit die anderen Dich erst einmal sehen können?“ Das klang dem neuen Zwerg – wie hieß er wohl? – zu statisch, hatte er sich doch bislang stets durch seinen beispielhaften Tatendrang hervorgetan. Zudem wollte er gerne seinen neuen Mitzwergen und nicht zuletzt auch Schneewittchen eine Freude bereiten. Als aber vom Weihnachtszeug die Rede war, war er sofort Feuer und Flamme.

Für Stollen war es zu spät, da half kein Bitten und Betteln. Aber so manche Leckerei konnte es doch noch geben.

Für jeweils einen Nanobeutel leckeren Gebäcks benötigte er dabei die folgenden Zutaten:

Buttertilden: 200 g Butter, 200 g Zucker, 500 g Mehl, 3 Eier, etwas Vanille, ein Schuss Wiesenduft.

Schneewittchenglück: 150 g Butter, 200 g Zucker, 200 g Mehl, 3 Eier, 350 g Mandeln, Gewürze.

Pisterne: 200 g Butter, 180 g Zucker, 400 g Mandeln, 2 Eier, Pistaziensplitter, Sternanis, etwas Mäusemilch zum Bestreichen.

Phikringel[1]*:* 100 g Butter, 200 g Zucker, 600 g Mehl, 7 Eier, 50 g Mandeln, Kuvertüre.

Wurzelklumpen: 500 g Mehl, 100 g Kakao, 1 Ei, 2 Quentchen Glück.

Nun endlich getraute sich auch der getreuliche Stempel, die Vorräte zu benennen. Es gab noch 6,5 kg Butter, 9 kg Zucker, 18 kg Mehl, 195 Eier und 7,75 kg Mandeln.

Oberschlau rechnete schnell aus, wieviel von jedem Gebäck hergestellt werden musste, um diese Vorräte zu leeren, und zum Glück legte Henne Helma nicht in letzter Minute noch ein Ei. Wie lautete Oberschlaus Ergebnis?

Achtung: Es gibt noch eine weitere Seite!

[1] Die Herkunft des Namens ist nicht eindeutig geklärt. Wahrscheinlich ist die Form des Gebäcks namensgebend. Wie sieht es aus?

gauss with la apple

Frohe Weihnachten

&

einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe bis spätestens Montag, den 11. 1. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!