

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^5.$$

Weiter seien $U_1 = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ und $U_2 = \langle x_4, x_5, x_6 \rangle$. Geben Sie Basen von U_1 , U_2 , $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ und $(U_1 + U_2)/U_2$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper, $p \in \mathbb{N}$, $S = \{A \in K^{p \times p} \mid A^\top = A\}$ und $T = \{A \in K^{p \times p} \mid A^\top = -A\}$.

- Zeigen Sie, dass S und T Untervektorräume von $K^{p \times p} \cong K^{p^2}$ sind.
- In K gelte nun $1 + 1 \neq 0$. Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von S und T .
- Was ändert sich, falls in K die Gleichung $1 + 1 = 0$ gilt?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Weiter seien U_1 , U_2 und U_3 Untervektorräume von V . Zeigen Sie:

- $(U_1 + U_2) \cap U_3 \supseteq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$.
- $(U_1 \cap U_2) + U_3 \subseteq (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3)$.
- Im Allgemeinen gilt weder in (a) noch in (b) Gleichheit.
- $U_1/(U_1 \cap U_2) \cong (U_1 + U_2)/U_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\Phi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

- Zeigen Sie, dass es ein $q \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\text{Bild}(\Phi^q) = \text{Bild}(\Phi^{q+r})$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$.
- Sei $q \in \mathbb{N}$ wie in Teilaufgabe (a). Weiter seien $U = \text{Kern}(\Phi^q)$ und $W = \text{Bild}(\Phi^q)$. Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$, $\Phi(U) \subseteq U$ und $\Phi(W) = W$.
- Zeigen Sie, dass es eine Basis $\{b_1, \dots, b_s\}$ von U gibt, so dass $\Phi(b_i) \in \langle b_1, \dots, b_{i-1} \rangle$ für alle $i \in \{1, \dots, s\}$.