Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinante der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der komplexen Matrix

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1-i & \alpha & i \\ i-\alpha & 1-\alpha & \alpha - i \\ 1-\alpha & 1 & 2+\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{C}$ und bestimmen Sie diejenigen $\alpha \in \mathbb{C}$, für die B_α invertierbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper, $p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{GL}_p(K)$ und $b \in K^p$. Weiter bezeichne A_i die Matrix, welche aus A entsteht, indem man die i-te Spalte durch b ersetzt. Zeigen Sie, dass ein Vektor $x = (x_1, \dots, x_p)^\top \in K^p$ genau dann eine Lösung von $Ax = b$ ist, wenn $x_i = \det(A_i)/\det(A)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper, $p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{GL}_p(K)$ und $u, v \in K^p$. Weiter bezeichne I die $p \times p$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ v^\top & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I + uv^\top & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ -v^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & u \\ 0 & 1 + v^\top u \end{pmatrix}$$

und schlussfolgern Sie, dass $\det(A + uv^\top) = (1 + v^\top A^{-1} u) \cdot \det(A)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $q \geq 1$ seien die Matrizen $L_q = (\ell_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q} \in \mathbb{Q}^{q\times q}$ und $P_q = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq q} \in \mathbb{Q}^{q \times q}$ durch

$$\ell_{i,j} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & \text{falls } i \geq j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $p_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ definiert. Dabei bezeichne $\binom{n}{k}$ wie üblich den Binomialkoeffizienten.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Matrix E gibt, so dass

$$E \cdot L_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{q-1} \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie, dass $P_q = L_q \cdot L_q^\top$ und berechnen Sie $\det(P_q)$.

Abgabe bis spätestens Montag, den 01. 02. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!