Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & -12 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -5 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 5 & -8 & 5 \\ 5 & -10 & 7 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\mathrm{CP}_A(T) \in \mathbb{R}[T]$ von A über $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A in $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A in $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Wir definieren für $n \in \mathbb{N}_0$ die Fibonacci-Zahl $F_n \in \mathbb{N}_0$ durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

(a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Finden Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(d) Es seien $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zeigen Sie, dass $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ und schliessen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Weiter sei $\Phi\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ die lineare Abbildung $v \mapsto Av$.

(a) Bestimmen Sie für $u = (-1, 0, 0, 1)^\top$ einen minimalen Φ-invarianten Unterraum $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ mit $u \in U$.

(b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{Q}^4$, so dass die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix ist?

Abgabe bis spätestens Montag, den 08. 02. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!