Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 14

1 Lineare Abbildungen und Abbildungsmatrizen

Aufgabe 1.1
Es seien K ein Körper, U, V, W Vektorräume über K und $\Phi\colon U \to V$, $\Psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $\Psi \circ \Phi$ surjektiv, so existiert zu jedem $v \in V$ ein $u \in U$ mit $\Psi(v) = (\Psi \circ \Phi)(u)$.
(b) Ist $\Psi \circ \Phi$ ein Isomorphismus, so gilt $V = \operatorname{Bild}\Phi \oplus \operatorname{Kern}\Psi$.

Aufgabe 1.2
Es seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V.

(a) Zeigen Sie: Besitzt Φ bezüglich jeder Basis von V dieselbe Abbildungsmatrix, so gibt es ein $c \in K$ mit $\Phi = c \cdot \mathrm{id}_V$.
(b) Folgern Sie aus Teil (a), dass eine Matrix $A \in K^{n\times n}$, die mit allen Matrizen $B \in K^{n\times n}$ vertauschbar ist, d. h. $A \cdot B = B \cdot A$ erfüllt, von der Form $A = c \cdot I_n$ für ein $c \in K$ ist.

2 Determinanten

Aufgabe 2.1
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-1}(2i-1) & \text{falls } j = 1, \\ 1 & \text{falls } j > 1 \text{ und } j = i \text{ oder } j = i+1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

(a) Geben Sie A_1, A_2 und A_3 explizit an und berechnen Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.
(b) Berechnen Sie $\det(A_n)$.

Aufgabe 2.2
Es seien K ein Körper, $n \ge 1$ und $x_1, \dots, x_n \in K$. Weiter sei $V = (\nu_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ die sogenannte *Vandermonde-Matrix* mit $\nu_{i,j} = x_j^{i-1}$. Zeigen Sie, dass

$$\det(V) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

3 Faktorräume

Aufgabe 3.1
Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, Φ ein Endomorphismus von V und $U \subseteq V$ ein Φ-invarianter Untervektorraum mit Basis $u_1, \dots, u_p$. Wir erweitern die Basis $u_1, \dots, u_p$ zu einer Basis $B = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ von V und betrachten die Darstellungsmatrix $D_{B,B}(\Phi) = (a_{i,j})_{1\le i,j\le p+q}$ von Φ bzgl. B. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\overline{\Phi}\colon V/U \to V/U$, $\overline{v} \mapsto \overline{\Phi(v)}$ ist ein wohldefinierter Endomorphismus von V/U.
(b) Die Abbildungsmatrix von $\overline{\Phi}$ bzgl. der Basis $\overline{B} = (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_q})$ hat die Gestalt $D_{\overline{B},\overline{B}}(\overline{\Phi}) = (a_{i,j})_{p+1\le i,j\le p+q}$.

4 Dualräume

Aufgabe 4.1
Es seien K ein Körper und V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Weiter seien $(w_1, \dots, w_p)$ eine Basis von W und $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in V^*$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\Phi\colon V \to W$ mit

$$\Phi(v) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(v) \cdot w_i$$

ist ein Homomorphismus von K-Vektorräumen.

(b) $\mathrm{Kern}(\Phi) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Kern}(\lambda_i)$.

(c) Ist $(w_1^*, \dots, w_p^*)$ die zu $(w_1, \dots, w_p)$ duale Basis von W, so ist $\Phi^*(w_i^*) = \lambda_i$.

(d) Für jede lineare Abbildung $\Phi\colon V \to W$ gibt es Linearformen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, so dass

$$\Phi(v) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(v) \cdot w_i.$$

Aufgabe 4.2
Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ definieren wir $U^\perp \subseteq V^*$ durch

$$U^\perp = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ für alle Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$.

(b) Zeigen Sie, dass $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$ für alle Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$.

5 Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

Aufgabe 5.1
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist und bestimmen Sie D.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T mit $D = T^{-1}AT$.

Aufgabe 5.2
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor von A? Geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar?

Wir wünschen Ihnen schöne und erholsame Semesterferien!