Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein

Karlsruhe, Februar 2016

Dualräume, Faktorräume und die Analysis.

0. Der Dualraum

Wenn V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist, dann gibt es im Dualraum die Basis $B^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$, deren Elemente zu denen von B in der Beziehung

$$b_l^*(b_k) = \delta_{l,k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = l, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

stehen.
Für $v = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ gilt also

$$b_l^*(v) = b_l^*(\sum_k a_k b_k) = \sum_k a_k b_l^*(b_k) = a_l,$$

und das zieht die Gleichung

$$v = \sum_{k=1}^n b_k^*(v) \cdot b_k \tag{1}$$

nach sich.
Wenn $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus ist, dann gibt es dazu die duale Abbildung $\Phi^* : V^* \to V^*$, die für $\lambda \in V^*$ durch

$$\forall v \in V: \ (\Phi^*(\lambda))(v) = \lambda(\Phi(v))$$

definiert wird.
Insbesondere ist

$$\Phi(v) = \sum_{k=1}^n b_k^*(\Phi(v)) \cdot b_k = \sum_{k=1}^n (\Phi^*(b_k^*))(v) \cdot b_k. \tag{2}$$

1. Die Taylorformel

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Dieser Vektorraum besitzt zum Beispiel die Basis $B := \{b_0, \dots, b_n\}$, wobei

$$b_k = X^k, \ 0 \leq k \leq n$$

Polynome kann man ableiten, und das ist eine Lineare Abbildung $D : V \to V$, die durch Lineare Fortsetzung der Vorschrift

$$D(b_k) := \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0, \\ k b_{k-1}, & \text{falls } 1 \leq k \leq n, \end{cases}$$

gegeben wird.
Es ergibt sich die altbekannte Vorschrift

$$D(\sum_{k=0}^n a_k X^k) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}.$$

Wir interessieren uns auch für höhere Ableitungen und notieren diese in Übereinstimmung mit der Tradition auch als

$$f^{(k)} := D^k(f).$$

Was ist die zu B duale Basis? Wie stets wird sie auch hier durch den Wunsch

$$b_l^*(b_k) = \delta_{k,l}$$

festgelegt.
Zum Beispiel sieht man schnell, dass $b_0^*(b_k) = 0^k = b_k(0)$ gilt, und aus der Linearität der Abbildung $f \mapsto f(0)$ folgt

$$b_0^*(f) = f(0),$$

denn wir haben links und rechts des Gleichheitszeichens zwei lineare Abbildungen, die auf den Basisvektoren dasselbe machen.
Als nächstes sieht man $b_1^*(b_k) = D(b_k)(0) = b_k'(0)$. Wegen der Linearität des Ableitens und des Auswertens folgt allgemein wieder

$$b_1^*(f) = f'(0).$$

Das sieht schon sehr vielversprechend aus. Die Allgemeine Formel für alle Elemente der Dualbasis lautet:

$$b_l^*(f) = \frac{1}{l!} f^{(l)}(0).$$

Dass dies für die Basisvektoren das richtige tut sieht man schnell, denn

$$D^l(X^k) = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-l+1) X^{k-l},$$

und das gibt bei Auswertung am Nullpunkt gerade 0, wenn $l \neq k$ und $k! = l!$, wenn $k = l$.
Aus der allgemeinen Identität

$$f = \sum_{k=0}^{n} b_k^*(f) \cdot b_k,$$

die als Formel (1) in 0. erinnert wurde, folgt daher

$$f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Noch etwas allgemeiner erhalten wir für $a \in \mathbb{R}$ die Taylorformel für Polynome:

$$f(a+X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

Dies kommt daher, dass auch $f(a+X)$ ein Polynom in X ist und die Ableitung mit der Verschiebung des Arguments vertauscht.
Aus dem Blickwinkel der Linearen Algebra kann man das so formulieren:

$$\Phi : V \to V,\ f(X) \mapsto f(a+X),$$

ist eine Lineare Abbildung. Wendet man die dazu duale Abbildung auf die duale Basis an, so gilt laut Definition

$$(\Phi^*(b_l^*))(f) = b_l^*(\Phi(f)) = \frac{f^{(l)}(a)}{l!}.$$

Hier sieht man also sehr schön, was die duale Abbildung ist.
Und nun folgt aus der allgemeinen Formel (2) in Abschnitt 0 die gewünschte Taylorformel:

$$\Phi(f) = \sum_{k=0}^{n} b_k^*(\Phi(f)) \cdot b_k.$$

2. Lagrange Interpolation

Es sei nach wie vor V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Wir haben eben schon gesehen, dass für $a \in \mathbb{R}$ die Auswertung

$$V \ni f \mapsto f(a) \in \mathbb{R}$$

eine Linearform auf V ist. Nun sehen wir uns diese Linearform für $n+1$ Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ an, die paarweise verschieden sind. Wir erhalten $n+1$ Linearformen

$$\lambda_k : V \to \mathbb{R},\ \lambda_k(f) := f(a_k).$$

Ein Polynom $f \in V$, das im Kern all dieser Linearformen liegt, hat $n+1$ Nullstellen $a_0, \ldots a_n$. Da der Grad nicht größer als n ist, ist es zwangsläufig das Nullpolynom. Wir erhalten daher (wegen der Dimensionsformel) einen Isomorphismus

$$\Psi : V \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \Psi(f) := (f(a_k))_k = (\lambda_k(f))_k.$$

Das zeigt auch, dass die $\lambda_k,\ 0 \leq k \leq n,$ linear unabhängig sind.
Die Suche nach einem Polynom, das an den Stellen $a_0, \ldots, a_n$ beliebig vorgegebene Funktionswerte $w_0, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$ annimmt, ist also die Suche nach

$$\Psi^{-1}((w_l)_l).$$

Diese gehen wir systematisch an, indem wir eine Basis von V suchen, zu der die λ_k die duale Basis bilden. Wir suchen also zunächst Polynome $f_l \in V$ mit der Eigenschaft

$$\lambda_k(f_l) = \delta_{k,l}.$$

Konkreter heißt das:

$$f_l(a_k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l, \\ 1, & \text{falls } k = l. \end{cases}$$

Dass alle a_k mit $k \neq l$ Nullstellen von f_l sind, heißt, dass f_l vom Produkt

$$\prod_{k \neq l} (X - a_k)$$

geteilt wird. Um dann noch den Funktionswert an der Stelle a_l zu justieren, bleibt uns nur die Wahl

$$f_l = \prod_{k \neq l} \frac{X - a_k}{a_l - a_k},$$

die wegen $a_k \neq a_l$ möglich ist und tatsächlich ein Polynom vom Grad n liefert, also in V liegt.
Damit haben wir die gewünschte Basis gefunden. Es folgt

$$\Psi^{-1}((w_l)_l) = \sum_{l=0}^{n} w_l f_l.$$

Das ist die Interpolationsformel von Lagrange.

3. Integration

Nun sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und V der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf I. Die Ableitung

$$D : V \to V, D(f) := f'$$

ist ein Endomorphismus dieses Vektorraums.
Der Kern K der Ableitung ist der Untervektorraum der konstanten Funktionen. D ist surjektiv, da jede Funktion in V stetig ist und damit eine Stammfunktion hat.
Der Homomorphiesatz sagt also, dass die Abbildung

$$\tilde{D} : V/K \to V, [f] \mapsto f',$$

ein Isomorphismus ist. Insbesondere gibt es eine Umkehrabbildung $\int$, die der Funktion $f \in V$ das unbestimmte integral zuordnet, also die Menge aller Stammfunktionen zuordnet. Diese Menge ist <u>ein Element</u> im Faktorraum V/K. Das ganze ist sinnvoll, denn die Stammfunktion ist nur bis auf eine konstante Funktion definiert.

Wenn allgemeiner $I \subseteq \mathbb{R}$ offen ist und V sowie D wie im ersten Fall definiert sind, dann ist der Kern K von D die Menge aller <u>lokal</u> konstanten Funktionen auf V und für alle $f \in V$ ist die Stammfunktion auf den Zusammenhangskomponenten von I unabhängig wählbar. Aber wieder erhalten wir einen Isomorphismus $\tilde{D} : V/K \to V$ mitsamt der Umkehrabbildung

$$\int : V \to V/K.$$