Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (P)

Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ist A, beziehungsweise C invertierbar? Was sind gegebenenfalls die Inversen?

b) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist B, beziehungsweise D invertierbar?

Aufgabe 2 (P)

a) Für einen Ring R mit Eins wird die Teilmenge der bezüglich der Multiplikation invertierbaren Elemente mit $R^\times$ notiert.
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$ gilt.

b) Ist die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X], \quad \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=1}^{k} i \cdot a_i X^{i-1}$$

ein Ringhomomorphismus?

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$E_n - A^m = (E_n - A) \cdot (\sum_{j=0}^{m-1} A^j) = (\sum_{j=0}^{m-1} A^j) \cdot (E_n - A)$$

b) Zeigen Sie, dass $E_n - A$ invertierbar ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^k = 0$ gilt.
Geben Sie die Inverse an.

Abgabe der Lösungen bis zum 28.11.2016 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit maximal 6 Punkten bewertet.