Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (P)

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.
   (i) $V_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ mit der üblichen Multiplikation als Vektoraddition und der Skalarmultiplikation $\lambda \odot v := v^\lambda$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
   (ii) $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 = -y^2\}$ mit der von $\mathbb{Q}^2$ geerbten Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

b) Es sei $\mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum und $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben als
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors durch v_1, v_2 und v_3, sowie eine Basis der linearen Hülle von $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Aufgabe 2 (P)

Betrachten Sie die folgende Teilmenge der komplexen Matrizen:
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } a + d \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass V *kein* komplexer Vektorraum ist.
b) Zeigen Sie, dass V ein *reeller* Vektorraum ist.
c) Geben Sie eine Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum an.

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{C}$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum.
b) $\mathbb{R}$ ist <u>kein</u> endlich erzeugter $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Abgabe der Lösungen bis zum 05.12.2016 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit maximal 6 Punkten bewertet.