Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (P)

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ definiert als

$$U_1 := \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \qquad U_2 := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimmen Sie zu $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension. Bestimmen Sie außerdem einen Untervektorraum W des $\mathbb{R}^4$, sodass $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2 (P)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist
$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XB\}$$
ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Sind speziell
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix},$$
so gilt für den Untervektorraum U aus Teil (a)
$$U = \{0\} \iff \{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset.$$

Aufgabe 3

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^\top$ gilt.
Eine Matrix heißt *schiefsymmetrisch* oder *alternierend*, wenn $A = -A^\top$ gilt.
Zeigen Sie:

a) Die Menge $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ der symmetrischen Matrizen bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n\times n}$.

b) Die Menge $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{C})$ der schiefsymmetrischen Matrizen bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n\times n}$.

c) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $A + A^\top$ symmetrisch.

d) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $A - A^\top$ schiefsymmetrisch.

e) Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lässt sich in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Teil zerlegen, d.h.
$$A = A_\mathrm{s} + A_\mathrm{a}$$
mit $A_\mathrm{s} \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ und $A_\mathrm{a} \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{C})$.

f) Es gilt
$$\mathbb{C}^{n\times n} = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Alt}_n(\mathbb{C}).$$

Abgabe der Lösungen bis zum 19.12.2016 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit maximal 6 Punkten bewertet.