

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (P)

Es sei \mathbb{K} ein Körper und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{5 \times 5}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ * & 0 & \# \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

- Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ den Rang von A^k .
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $*$ und $\#$ den Rang von B .

Aufgabe 2 (P)

Es sei \mathbb{K} ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ sowie $B \in \mathbb{K}^{q \times r}$.

Zeigen Sie, dass $\text{Rang}(AB) \leq \text{Rang}(A)$ und $\text{Rang}(AB) \leq \text{Rang}(B)$ gilt.

Aufgabe 3

Im Vektorraum \mathbb{Q}^3 sei der Untervektorraum

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

gegeben, womit der Faktorraum \mathbb{Q}^3 / U gebildet werde.

- Geben Sie für die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

die Äquivalenzklassen \tilde{x} , \tilde{y} und $\widetilde{3x + y}$ an.

- Bestimmen Sie eine Basis B von \mathbb{Q}^3 / U .
- Stellen Sie die Vektoren

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad \widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}} \in \mathbb{Q}^3 / U$$

bezüglich der Basis B dar. Sind diese beiden Vektoren linear unabhängig?

Aufgabe 4 (Wiederholung: Gruppen)

Auf \mathbb{Z} sei eine Verknüpfung $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ erklärt durch $\alpha \circ \beta := \alpha + \beta + 5$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

- Zeigen Sie, dass (\mathbb{Z}, \circ) eine abelsche Gruppe ist.
- Weisen Sie nach, dass (\mathbb{Z}, \circ) und $(\mathbb{Z}, +)$ isomorphe Gruppen sind.
- Lösen Sie die Gleichung $x \circ x = 21$ in (\mathbb{Z}, \circ) .

Aufgabe 5 (Wiederholung: Gruppenhomomorphismen)

Es seien $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G und (H, \cdot) eine weitere Gruppe.

- Geben Sie die Definition eines Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \rightarrow H$ an und beweisen Sie, dass für solch einen Gruppenhomomorphismus $\Phi(e_G)$ das neutrale Element von H ist.
- Nun besitze G die Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ eine ungerade natürliche Zahl n existiert mit $g^n = e_G$.
Zeigen Sie, dass es keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \rightarrow \{1, -1\}$ gibt.

Aufgabe 6 (Wiederholung: Lineare Unabhängigkeit)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} .

- Seien $a_1, a_2, a_3 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$.
Zeigen Sie:

$$[a_1, a_2] = [a_1, a_3].$$

- Seien $a_1, \dots, a_n \in V \setminus \{0\}$.
Beweisen Sie, dass a_1, \dots, a_n genau dann linear unabhängig sind, wenn gilt

$$[a_1, \dots, a_i] \cap [a_{i+1}, \dots, a_n] = \{0\} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

Aufgabe 7 (Wiederholungsfragen)

- Ist $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe?
- Ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Körper?
- Ist jeder Körperhomomorphismus $\Phi \neq 0$ injektiv?
- Kommutiert eine Diagonalmatrix mit jeder beliebigen anderen Matrix der selben Dimension?
- Wann heißt eine Menge von Vektoren linear unabhängig?
- Gibt es fünf linear unabhängige Elemente im Vektorraum $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 3\}$?
- Können zwei verschiedene Basen eines Vektorraums unterschiedlich viele Elemente haben?
- Wie sehen die Komponentenvektoren der Elemente einer beliebigen Basis B bezüglich B aus?
- Ist die Vereinigung von Untervektorräumen im Allgemeinen wieder ein Untervektorraum?
- Wie sehen eindimensionale Untervektorräume im \mathbb{R}^2 aus?

Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und einen guten Rutsch!

Abgabe der Lösungen bis zum 09.01.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.